ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΜΕ ΘΕΜΑ:

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
(Network Theory & Applications)

ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ: **ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΜΠΕΛΙΤΣΗ**

Επιβλέπων καθηγητής: **Κολέτσος Ιωάννης, Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ**

Επιτροπή αξιολόγησης: 1) Κοκκίνης Βασίλειος, Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

2) Κολέτσος Ιωάννης, Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

3) Στεφανέας Πέτρος, Λέκτορας ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών

Θεωρία Δικτύων και Εφαρμογές

Διπλωματική Εργασία

του

Νίκου Μπελίτση

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Ευχαριστίες

Θα ήθελα ειλικρινά να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Κολέτσο για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ήταν σε όλη τη διάρκεια της διαθέσιμος να μου προσφέρει με ηρεμία τις γνώσεις του και τις συμβουλές του για την κατανόηση του ειδικού πεδίου της Επιχειρησιακής Έρευνας.
Ειδική αναφορά πρέπει να γίνει στη συνάδελφό μου, κα Νεφέλη Ροδοπούλου για την πολύτιμη συνδρομή της στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας αλλά και συνολικά στον κύκλο των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται το ιδιαίτερα ενδιαφέρον πεδίο της Επιχειρησιακής Έρευνας που ονομάζεται Θεωρία Δικτύων. Η Θεωρία Δικτύων καταφέρνει εύκολα να ενσωματώνει και να απεικονίζει πλήθος χαρακτηριστικών και μεταβλητών σε μορφή εύληπτου γραφήματος. Κωδικοποιεί τα δεδομένα ξεπερνώντας τα εμπόδια των κλασικών μεθόδων που περιορίζονταν, εκ φύσεως, λόγω συγκεκριμένων χώρων και εργαλείων επίλυσης. Είναι η μελέτη ενός πυκνού συμπλέγματος συστημάτων που απεικονίζεται μέσω γραφημάτων ξεχωριστής δομής.

Στόχος της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι εκτός των άλλων και η συμπυκνωμένη παρουσίαση εκείνων των σπουδαίων τεχνικών που είναι ειδικά σχεδιασμένες για μια ευρεία οικογένεια σύνθετων προβλημάτων.

Η μεθοδολογία που αναλύεται, στηρίζεται στην αρχή των σχέσεων πλέγματος και ξεδιπλώνονται με φυσικό τρόπο οι αρετές και τα πλεονεκτήματα των μεθόδων που εκμεταλλεύονται στο έπακρον την ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών.

Ειδικότερα, στεκόμαστε επισταμένως στα προβλήματα δικτύων που αναζητούν έναν ιδεώδη στόχο για μία συγκεκριμένη εργασία λαμβάνοντας υπ’όψιν πλήθος συνδυαστικών παραγόντων, μεταβλητών και περιορισμών. Με γνώμονα πως τα πάντα γύρω μας (οι κοινωνικές και επαγγελματικές σχέσεις, αεροπορική και ακτοπλοϊκή σύνδεση κτλ) μπορούν να ‘’μεταφραστούν’’ σε δίκτυο, διερευνούμε τον βέλτιστο στρατηγικό σχεδιασμό που υπερτερεί έναντι των άλλων λόγω της ‘’ζωντανής’’ οπτικής αναπαράστασης των σχέσεων.

Αναλύονται οι επιμέρους μέθοδοι της θεωρίας, προτείνονται συγκεκριμένοι τρόποι αντιμετώπισης πρακτικών προβλημάτων και παρουσιάζονται μαζι με το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο κάποια χρήσιμα και ενδεικτικά παραδείγματα.

Abstract

The present thesis copes with the particularly interesting field of Mathematics and Operational Research which is called ‘’Network Theory’’. The Network Theory manages easily to embody and illustrate a set of various characteristics and variables in a shape of a comprehensible graph. It codes the data by overwhelming the obstacles of classic methods which are limited by nature due to the certain and specific space and resolve tools. It is also the study of a concentrate and dense complex of different systems which reenact through figures with special structure.

Objective of this thesis is, beyond others, the overview and presentation of those important techniques whice are refine designed for a wide family of complex problems.

The methodology which is, here, analysed is supported by the principal of the relations in a grid and unwrap with physical way the virtues and the advantages of the algorithms which also exploit the most the evolution of modern technology.

More specifically, we stand closely to the network’s problems which seek an ideal target and solution of a special work each time taking into account a huge sum of combiner factors and restrictions.

In order that everything around us (like social and professional relations, coastal and airline connections etc) can be ‘’translated’’ to a network, we look the optimal strategic planning that outmatches, against others, because of the vivid visualization of relations in these graphs.

We analyze the individual methods of this theory, we propose certain ways and sequence of steps which face effectively a variety of practical problems and we, finally, present the basic theorytical background with some useful indicative examples.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Επιχειρησιακή Έρευνα

1.1 Εισαγωγή – Ιστορική αναδρομή

Ο τομέας της επιστήμης που βοηθά στη σωστή και ακριβή λήψη αποφάσεων και των συνεπακόλουθων λύσεων των προβλημάτων που παρουσιάζονται είναι η *Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Research [1]).*

Κατά την περίοδο του Β’ Παγκοσμίου Πολέμου θεωρείται ότι τέθηκαν οι βάσεις για τη δημιουργία και εξάπλωση του νέου αυτού επιστημονικού κλάδου. Πιο συγκεκριμένα, για τον βέλτιστο καταμερισμό των στρατιωτικών δυνάμεων και για τον περιορισμό των αστοχιών και λαθών στην εκπόνηση σχεδίων των πολεμικών επιχειρήσεων για την εξουδετέρωση των αντιπάλων συγκροτήθηκαν καταρτισμένες και εξειδικευμένες επιστημονικά ομάδες με κύρια αποστολή τους την έρευνα στο πεδίο της μάχης.

Το γεγονός ότι το επιτυχημένο αποτέλεσμα στην τελική έκβαση της μάχης με την αποτελεσματική πλήξη των εχθρικών στόχων στηρίχτηκε εν πολλοίς στις απόφασεις που λήφθηκαν με γνώμονα τις προτάσεις των επιστημόνων, συνέβαλε στην αναγνώριση και μετέπειτα ραγδαία ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Στη συνέχεια, εδραιωμένη η νέα επιστήμη επεκτάθηκε και σε άλλους τομείς με θαυμαστά αποτελέσματα.

Με την πάροδο των χρόνων βελτιώθηκαν οι τεχνικές της και συγχρόνως με την τεχνολογική εξέλιξη την ηλεκτρονικών υπολογιστών δόθηκε περαιτέρω ώθηση και κίνητρο για διερεύνηση και αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων στο χώρο της

Βιομηχανίας,της Οικονομίας,του εμπορίου και γενικότερα του προγραμματισμού εργασιών.

1.2 Ορισμός

Επιχειρησιακή Έρευνα {[1],[2]} είναι ο επιστημονικός κλάδος των Μαθηματικών και της Πληροφορικής που αποσκοπεί στη βέλτιστη λήψη αποφάσεων λαμβάνοντας υπ’όψιν πλήθος παραμέτρων και υπακούει σε αυστηρούς περιορισμούς. Είναι η εφαρμογή της επιστήμης σε σύνθετα προβλήματα που περιλαμβάνουν διαφόρους παράγοντες και ανακύπτουν κατά τη διαχείριση μεγάλων συστημάτων και καταλήγουν σε συγκεκριμένα βέλτιστα αποτελέσματα και ενέργειες.

1.3 Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Στην καθημερινότητά μας στο χώρο εργασίας μας και όχι μόνο ερχόμαστε αντιμέτωποι με μια σειρά προβλημάτων με τεχνικές δυσκολίες που ζητούν άμεσα απαντήσεις προς την σωστή κατεύθυνση. Η πορεία και η στρατηγική που ακολουθείται σε γενικό πλαίσιο για τη διεκπεραίωση τέτοιων προβλημάτων περιλαμβάνεις τις παρακάτω φάσεις [2]:

α)Ανάλυση και κατανόηση του προβλήματος που καλούμαστε κάθε φορά να επιλύσουμε,

β)Καθορισμός στόχων και προσδιορισμός των διαφαινόμενων λύσεων που αναμένουμε για το εκάστοτε πρόβλημα,

γ)Κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του ειδικού προβλήματος με τον εντοπισμό των παραμέτρων και των μεταβλητών που συνιστούν το θέμα προς επίλυση,

δ)Σύγκριση και ανάλυση των εναλλακτικών λύσεων ώστε να καταλήξουμε στη βέλτιστη εξ αυτών που ανταποκρίνεται στο πρόβλημά μας, ε)Επίλυση της επιλεγείσας μεθόδου. Το στάδιο αυτό είναι και το πιο απαιτητικό και δύσκολο αφού χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στον περιορισμό λαθών και παράλληλα συνεχή παρακολούθηση της εξέλιξης του προβλήματος,

στ)Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και τελικά συμπεράσματα για την αποδοτικότητα ή μη της απόφασης που ελήφθηκε.

1.4 Εργαλεία και Μέθοδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

Για την επίλυση και επεξεργασία του μαθηματικού μοντέλου που αντιστοιχεί στο πρόβλημα, έχουν αναπτυχθεί ποικίλες τεχνικές που προσδιορίζουν τη βέλτιστη δυνατή στρατηγική που ενδείκνυται να ακολουθηθεί. Μερικές από αυτές είναι ο *Προγραμματισμός Δικτύων (Network Programming*), τα *Δένδρα Αποφάσεων* καθώς και ο *Δυναμικός Προγραμματισμός* στον οποίο κάθε πρόβλημα είναι εφικτό να αναλυθεί σε επιμέρους, μικρότερα από το αρχικό, προβλήματα. Ουσιαστικά, αντιμετωπίζουμε προβλήματα βελτιστοποίησης όπου άλλοτε χρειάζεται να μεγιστοποιήσουμε μια ποσότητα κι άλλοτε να την ελαχιστοποιήσουμε. Σε κάθε περίπτωση αναζητείται εκείνο το μαθηματικό μοντέλο και οι ειδικές υπολογιστικές τεχνικές για τη λύση του. Έτσι, για κάθε φάσμα προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένοι αλγόριθμοι ανάλυσης και επίλυσης που προσφέρουν μια πληθώρα εργαλειών, έτοιμων να εφαρμοστούν για το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΚΤΥΩΝ(NETWORK PROGRAMMING)

2.1 Εισαγωγή-Ιστορικά Στοιχεία

Η θεωρία δικτύων (γράφων) [3] είναι το γνωστικό και επιστημονικό πεδίο των μαθηματικών με σημαντικές εφαρμογές στο χώρο της πληροφορικής, της κοινωνιολογίας,της διοίκησης επιχειρήσεων κτλ. Τα θεμέλιά της εντοπίζονται στη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα αλλά η δυναμική τους ώθηση σημειώνεται στη μεταπολεμική περίοδο.

Ο ειδικός αυτός τομέας των μαθηματικών ασχολείται με τη μελέτη των δικτύων που περιγράφουν μια αλληλουχία σύνδεσης καθώς και με τις σχέσεις που αναπτύσσονται στο εσωτερικό τους. Απαρχή της θεωρίας των γραφημάτων είναι η επισταμένη έρευνα του **Leonard Euler** (1707-1783) [5] πάνω στις *Επτά Γέφυρες* του *Konigsberg* το 1736 που δημοσιεύθηκε σε πανεπιστημιακό έντυπο. Η διατριβή αυτή σε συνδυασμό με την παράλληλη προσωπική εργασία του *Alexandre-Theophile Vandermonde* (1735-1796) στο μαθηματικό *πρόβλημα του Ίππου* στη σκακιέρα που με τη σειρά του παρακινήθηκε από το πρόβλημα που εισήγαγε ο *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) έβαλαν τις γερές βάσεις για τη συστηματική μελέτη τους.

Τις προσπάθειες των προηγούμενων σπουδαίων μαθηματικών ενίσχυσε αργότερα ο **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) που έθεσε τις αρχές της τοπολογίας.

Η ύπαρξη δικτύων γύρω μας είναι εμφανής. Το ηλεκτρικό ρεύμα και οι τηλεπικοινωνίες καθίστανται εφικτά μέσω δικτύων που επιτρέπουν την ομαλή σύνδεση του κενρικού παρόχου με τους δέκτες ανεξάρτητα από τη μεταξύ τους απόσταση.

Το ίδιο συμβαίνει και στο πεδίο των Μεταφορών και της Συγκοινωνίας με τα οδικά και σιδηροδρομικά δίκτυα. Εν ολίγοις η χρήση των δικτύων διευκολύνει τη ζωή μας, ’’εκμηδενίζει’’ αποστάσεις και εξοικονομεί πόρους. Σε κάθε περίπτωση, η θεωρία των δικτύων ασχολείται επισταμένως με τη μελέτη, επεξεργασία, χειρισμο και επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με μεταφορά αντικειμένων από ένα σημείο σε άλλο, με τη σύνδεση διαφόρων απομακρυσμένων περιοχών ενός συστήματος, με την ελαχιστοποίηση του κόστους και αύξηση κέρδους.

Η θεωρία των δικτύων, με εμπνευστή τους τον *Kirchhoff* [4] στο ειδικό πεδίο των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, εξελίσσεται συνεχώς και ταυτόχρονα προσφέρει μια εύγλωττη απεικόνιση των μαθηματικών προβλημάτων.

2.2 Προβλήματα που επιλύονται μέσω Θεωρίας Δικτύων

Τα μοντέλα δικτύων είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα διότι επιτρέπουν την αναπαράσταση και μετατροπή οποιουδήποτε πραγματικού προβλήματος σε δίκτυο. Τα κυριότερα προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με τέτοιο σχεδιασμό είναι τα εξής:

Α. Το Πρόβλημα της Σύντομης Διαδρομής

Πρόκειται για εκείνο το χαρακτηριστικό πρόβλημα [5] στο οποίο καλούμαστε να εντοπίσουμε την ελάχιστη διαδρομή που χρειάζεται να διανύσουμε για να μεταφερθούμε από ένα σημείο του δικτύου σε ένα άλλο.Η διαδικασία πραγματοποιείται βήμα προς βήμα και από κόμβο σε κόμβο και αφορά είτε σε προβλήματα αποστάσεων είτε σε χρονική διάρκεια είτε οικονομικού κόστους. Τέτοια προβλήματα είναι το *΄΄πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή’’ [5]* (travelling salesman problem) στο οποίο πρέπει να βρούμε το ελάχιστου μήκους μονοπάτι που περνά διαμέσου κάθε κόμβου (πόλη που πρέπει να επισκεφτεί) μόνο για μοναδική φορά και επιστρέφει στην αφετηρία.

Β. Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής

Είναι η ειδική κατηγορία προβλημάτων [5] που περιλαμβάνουν εκείνες τις δραστηριότητες που ζητούν μεταφορά της μεγαλύτερης δυνατής ποσότητας από έναν κόμβο στον άλλον. Πρόκειται ουσιαστικά για πρόβλημα βελτιστοποίησης [6] όπου αναζητούμε την εφικτή και κυρίως μέγιστη ροή (λύση) που περνά από μια αρχική πηγή και καταλήγει στον κόμβο προορισμού.

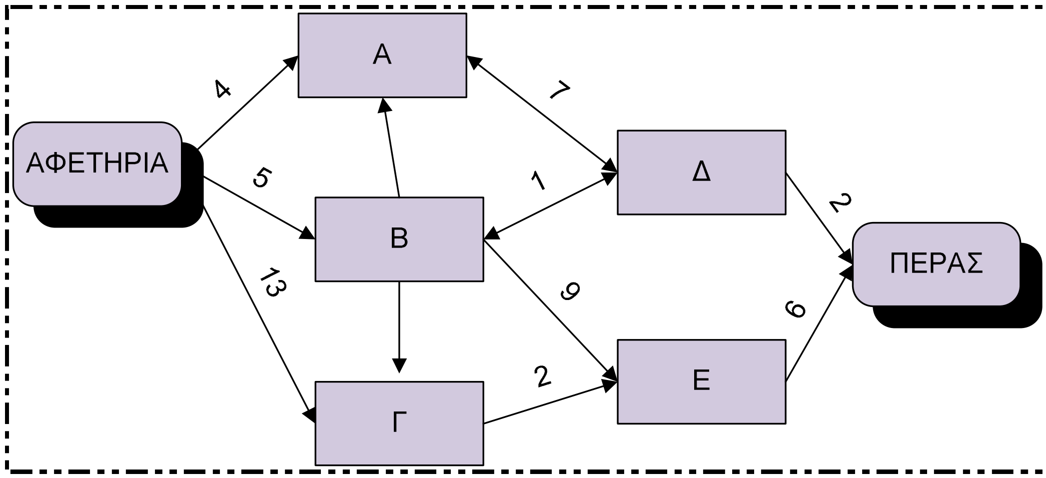
Γ.Το πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους

Σε τέτοια προβλήματα [7] αναζητούμε το ‘’φθηνότερη’’ κατά τον δυνατόν τρόπο για να στείλουμε κάποια συγκεκριμένη ποσότητα ροής μέσω του δικτύου ροής.

Γενικά, η θεωρία δικτύων αν και εφαρμόζεται σε στενό πεδίο προβλημάτων, προσφέρει ένα πολύτιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση πολύπλοκων, εκ πρώτης όψεως, θεμάτων και με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών επιτυγχάνουμε γρήγορα, σωστά και οικονομικά αποτελέσματα.

2.3 Βασικές έννοιες και ορολογία

Ιδιαίτερα χρήσιμη κρίνεται μια εισαγωγή στους όρους που χρησιμοποιούνται εκτενώς στη γλώσσα της Θεωρίας Δικτύων. Τα δίκτυα αναπαρίστανται μέσω γραφημάτων:



Σχήμα 2.3.1

Κάθε δίκτυο(network) {[3]-[4]} αποτελείται από ορισμένο σύνολο σημείων που ονομάζονται **κόμβοι.** Κάθε κόμβος φέρει έναν τίτλο (πχ Αφετηρία,Α,Β κτλ) που τον χαρακτηρίζει. Οι γραμμές που ενώνουν ανά 2 τους κόμβους λέγονται **ακμές (**arcs) που με τη σειρά τους συμβολίζονται με τα ονόματα των κόμβων που συνδέεουν. Στο σχήμα με ΑΔ εννοούμε την ακμή που ενώνει τους κόμβους Α και Δ (με κατεύθυνση από το Α στο Δ). Στα προσανατολισμένα δίκτυα γενικά (Α,Δ)≠(Δ,Α)

Η **ροή** (flow) ενός δικτύου διαχέεται διαμέσου των ακμών. Αν η ροή γίνεται προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση (για παράδειγμα από δεξιά προς τα αριστερά), τότε η ακμή καλείται **προσανατολισμένη (directed arc)** και το δίκτυο που περιέχει μόνο τέτοιες ακμές λέγεται προσανατολισμένο.

Μηδενικό είναι το **γράφημα {[4]-[8]}** που δεν έχει ακμές ή κορυφές ενώ **πλήρες [3]** (complete) λέμε εκείνο στο οποίο όλες οι κορυφές συνδέονται ανα 2 με μία ακμή.

Αραιό [9] είναι το γράφημα που περιέχει λίγες, σχετικά, ακμές και σε κάθε περίπτωση δεν συνδέονται σ’αυτό όλα τα ζεύγη κόμβων.

Πυκνό[9] καλείται το γράφημα το οποίο δεν είναι πλήρες αλλά λείπουν απ’αυτό μερικές ακμές.

Το δίκτυο που περίλαμβάνει και προσανατολισμένες ακμές αλλά και μη προσανατολισμένες λέγεται **μεικτό (mixed) {[8]}.**

Αντίστοιχα,αν η ροή σε μία ακμή γίνεται προς οποιαδήποτε κατεύθυνση,την καλούμε **μη προσανατολισμένη.** Σημειώνεται ότι κάθε μη προσανατολισμένο δίκτυο μετατρέπεται εύκολα σε προσανατολισμένο αντικαθιστώντας τις μη προσανατολισμένες ακμές με άλλες ισοδύναμες προς όλες τις κατευθύνσεις.

Κατά μήκος της κάθε ακμής αναγράφεται ένας αριθμός που δηλώνει τη χωρητικότητα (capacity) και περιγράφει την ποσότητα που δύναται να μεταφερθεί μεταξύ των συνδεόμενων κόμβων. Τέτοιες ακμές που χαρακτηρίζονται από κάποια αξία που φέρουν ονομάζονται **σταθμισμένες (weighted) [9].** Η ποσότητα της ροής που εισέρχεται σε έναν κόμβο A είναι **ίση** με την ποσότητα που εξέρχεται απ'αυτόν σύμφωνα με τη **συνθήκη διατήρησης**.

Οι κόμβοι διακρίνονται σε 2 κατηγορίες:

α)**κόμβος προέλευσης ή πηγή (source)** που ¨ευθύνεται¨ για την παραγωγή της ροής και

β)**κόμβος τέλους ή απόληξης (target)** που συγκεντρώνει την τελική ποσότητα.

Οι υπόλοιποι κόμβοι λέγονται **εσωτερικοί (internals)** στους οποίους διακινείται η **ροή (flow)** μέσω των ακμών.

Το δίκτυο συμβολίζεται με το σύνολο {V,A} όπου:

V: το σύνολο των κόμβων που απαρτίζουν το δίκτυο (στο δίκτυο του σχήματος V={Αφετηρία,Α,Β,Γ,Δ,Ε,Πέρας} και

A: το σύνολο των ακμών(π.χ ΑΔ,ΒΕ,ΔΒ)

Γειτονικοί λέγονται οι **κόμβοι {[3]- [8]}** που συνδέονται με μία ακμή (δεν παρεμβάλλεται άλλη ακμή ανάμεσά τους). Στο παράδειγμά μας οι Α και Δ είναι γειτονικοί (ενώ οι Α και Γ μη γειτονικοί). Με τον ίδιο τρόπο γειτονικές είναι οι ακμές που προηγούνται και έπονται του ίδιου κόμβου (οι ΒΓ και ΓΕ). **Βαθμός(degree) [4]** του κόμβου σε <u>μη προσανατολισμένο δίκτυο</u> είναι το πλήθος των ακμών που έχουν ως κορυφή τον συγκεκριμένο κόμβο ενώ στο <u>προσανατολισμένο δίκτυο,</u> ορίζεται ως **βαθμός (indegree)** το πλήθος των ακμών που οδηγούν σ'αυτόν και ως **outdegree** το πλήθος των ακμών που φεύγουν από τον εν λόγω κόμβο.

Βρόγχος [8] είναι η ακμή της οποίας η αρχή και το πέρας ταυτίζονται και κάθε βρόγχος έχει βαθμό 2.

Η αλληλουχία των διακριτών τόξων που ενώνει 2 κόμβους στο δίκτυο λέγεται **μονοπάτι(path) [9] .** Είναι δηλαδή η διαδοχική ακολουθία ακμών έτσι ώστε το πέρας μιας ακμής του να έιναι η αρχή της επόμενης με εξαίρεση την τελευταία. Στην περίπτωση του προσανατολισμένου δικτύου ένα μονοπάτι συμβολίζεται ως σύνολο των διακριτών γειτονικών κόμβων (π.χ P={Αφετηρία,Β,Γ,Ε,Πέρας} ή ως σύνολο διαδοχικών ακμών(π.χ P={ΑφΒ,ΒΓ,ΓΕ,Επερ}. Αντίστοιχα, **απλό [3]** (simple path) είναι το **μονοπάτι** (απλή διαδρομή) όπου στην συγκεκριμένη αλληλουχία κάθε κόμβος εμφανίζεται μία και μόνο φορά.

Απόσταση (distance) [8] 2 κόμβων ονομάζουμε το μήκος της συντομότερης διαδρομής τους.

Το μονοπάτι στο οποίο η αρχή και το πέρας του ταυτίζονται καλείται **κυκλικό(circle) [9].** Αν, τώρα, στο μονοπάτι κάθε κόμβος εμφανίζεται μία φορά και μόνο, τότε έχουμε **βασικό** μονοπάτι ενώ αν δεν επανεμφανίζεται η ίδια ακμή σ'αυτό έχουμε **απλό ή στοιχειώδες** μονοπάτι. Εναλλακτικά, απλό μονοπάτι είναι εκείνο που σε κάθε κόμβο του, εκτός των κόμβων αρχής και πέρατος, αντιστοιχούν 2 ακμές: η μία που εισέρχεται σ'αυτόν και η άλλη που εξέρχεται απ'αυτόν.

Λέμε ότι 2 κόμβοι **συνδέονται** αν υπάρχει στο δίκτυο τουλάχιστον ένα μη προσανατολίσμένο μονοπάτι που να τους ενώνει και επομένως έχουμε συνδεδεμένα ή συνεκτικά μη προσανατολισμένα δίκτυα αν **κάθε ζεύγος** κόμβων είναι συνδεδεμένο. Άρα το γράφημα G(V,E) όπου για κάθε ζεύγος Α και Β κόμβων (που ανήκουν στο V) υπάρχει ένα Α□Β μονοπάτι ονομάζεται **συνεκτικό** (connected) [10].

Το συνεκτικό τμήμα του δικτύου που **δεν** περιέχει κύκλους λέγεται **δένδρο(tree) [6]** και στην περίπτωση αυτή το πλήθος των ακμών υπολείπεται κατά ένα του πλήθους των κόμβων**.** Σε κάθε δένδρο υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που περνά από 2 συγκεκριμένους κόμβους. Σε συνεκτικά και προσανατολισμένα δίκτυα δεν υπάρχει πάντα μονοπάτι που να συνδέει 2 κόμβους i και j. Στην αντίθετη περίπτωση που αυτό συμβαίνει τότε έχουμε ένα **ισχυρά συνεκτικό δίκτυο [10]**.

Ονομάζουμε **δένδρο κάλυψης** (spanning tree) {[4]-[8]} ενός δικτύου G={V,E} το δένδρο που περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του G αλλά μόνο τις ελάχιστα απαιτούμενες ακμές ώστε να σχηματιστεί δένδρο. Αν υποθέσουμε ότι το μονοπάτι ενός γραφήματος περνάει από τους κόμβους p={s=n_1, A=n_2, D=n_3, F=n_4, G=n_5, K=n_6} και οι ακμές των άμεσα συνδεδεμένων κόμβων έχουν μήκη (βάρη) w(n_1,n_2), w(n_2,n_3), w(n_3,n_4), w(n_4,n_5), w(n_5,n_6) τότε το μήκος (ή βάρος)του μονοπατιού p υπολογίζεται [8] αθροίζοντας τα μήκη των κλάδων που το αποτελούν δηλαδή

$$w(p) = \sum_{i=1}^{r-1} w(n_i, n_{i+1})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Πρόβλημα της Συντομότερης διαδρομής (shortest path)

3.1 Περιγραφή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη προσανατολισμένο και συνεκτικό δίκτυο μ'έναν κόμβο-αφετηρία κι έναν κόμβο-τερματισμό. Ο σκοπός της μεθόδου είναι να βρεθεί ελάχιστη κατά το δυνατό διαδρομή για το μονοπάτι ΄΄αφετηρία-τερματισμός΄΄.
Ο αλγόριθμος εκτιμά το μήκος (σε χρονική διάρκεια,απόσταση,κόστος κτλ) κάθε πιθανής διαδρομής στο δίκτυο μεταξύ 2 κόμβων και υποδεικνύει τη βέλτιστη. Η μεθοδολογία επίλυσης είναι απλή και εφαρμόσιμη σε κάθε σύστημα όσο πολύπλοκο κι αν είναι.

Πιο συγκεκριμένα,η μέθοδος,γνωστή και ως αλγόριθμος Dijkstra [2] υπολογίζει τις ελάχιστες διαδρομές από τον κόμβο αρχής προχωρώντας προοδευτικά και στους υπόλοιπους κόμβους κι έτσι η διαδικασία συνεχίζει χωρίζοντας τους κόμβους σε **λυμένους** και **άλυτους**. Το πρόβλημα ολοκληρώνεται μόλις εξαντλήσουμε το σύνολο των κόμβων που αποτελείται το δίκτυό μας. Αρχικά, όλοι οι κόμβοι πλην της αφετηρίας, εκλαμβάνονται ως άλυτοι δηλαδή δεν έχουμε προσδιορίσει για αυτούς την ελάχιστη διαδρομή που πρέπει να καλύψουμε για να φθάσουμε σ'αυτούς από τον κόμβος εκκίνησης.

Συνεπώς, δοθέντος ενός γραφήματος-δικτύου G={V,E} **στόχος** είναι να βρεθεί για τη δεδομένη πηγή **s** το πιο σύντομο μονοπάτι για κάθε άλλο κόμβο στο γράφημα. Μόλις υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση που χωρίζει τον s από τον τυχαίο κόμβο Β, θεωρούμε ότι ο **Β έχει λυθεί** ή αλλιώς ότι τον έχουμε ΄΄επισκεφτεί΄΄ κατά βέλτιστο τρόπο. Στη συνέχεια αγνοούμε τον B και εξετάζουμε τους υπόλοιπους άλυτους κόμβους.

Η μεθοδολογία που ακολουθεί ο Dijkstra λειτουργεί ως εξής:

Αφού απαριθμήσουμε τους κόμβους που διαθέτουμε και αποδώσουμε μια τιμή-βάρος σε κάθε ακμή που συνδέει τα ζεύγη των κόμβων ακολουθεί το κύριο και ιδιαίτερα απλό μέρος της επίλυσης. Θεωρούμε ότι το σύνολο των κόμβων V έχει ως στοιχεία λυμένους και άλυτους κόμβους. Δηλαδή, **διαμερίζουμε το V** σε 2 ξένα υποσύνολα του S (solved) και U (unsolved). Εξ ορισμού ο κόμβος-**έναρξη s θεωρείται λυμένος** μια και η ελάχιστη απόσταση για να φθάσουμε σ'αυτόν λαμβάνεται ως 0. Παίρνουμε, λοιπόν, τον μοναδικό λυμένο κόμβο που έχουμε στη διάθεσή μας, τον s, και βρίσκουμε όλες τις δυνατές συνδέσεις του (links) με τους γειτονικούς του (άλυτους) κόμβους. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα σε ξεχωριστή στήλη σε πίνακα και εντοπίζουμε την ελάχιστη απ'αυτές ως την ιδανική για το πρόβλημά μας. Εκείνος ο κόμβος που προσεγγίζεται με τη μικρότερη απόσταση από τον s-αφετηρία είναι, τώρα, λυμένος και προστίθεται στο σύνολο S.

Η βασική ιδέα του εγχειρήματος Dijkstra στηρίζεται σε 2 βασικά λήμματα που ενισχύουν τη συλλογίστικη του πορεία:

Λήμμα 1. Το υπομονοπάτι (sub path) [11] για οποιοδήποτε σύντομο μονοπάτι στο δίκτυο είναι κι αυτό το συντομότερο μονοπάτι (στο υποδίκτυο που μελετάμε σε κάθε φάση).

Το λήμμα 1 μας διαβεβαιώνει ότι σε κάθε φάση επίλυσης εντοπίζεται η μερική βέλτιστη λύση και φτάνοντας στο τελικό στάδιο χτίζεται η συνολική βέλτιστη λύση.

Λήμμα 2.(Τριγωνική Ανισότητα)

Αν συμβολίσουμε με d(i,j) την (αριθμητική) τιμή του πιο σύντομου μονοπατιού από τον κόμβο-i έως τον κόμβο-j (συμβ. i□j) τότε ισχύει το εξής:

$$d(i,j) \le d(i,k) + d(k,j) \qquad \forall\, i,j,k \in V$$

Τηρείται η αρχή της προτεραιότητας στην επιλογή των κόμβων και η διαδικασία **ολοκληρώνεται** μόλις αδειάσει το σύνολο U και όλοι οι κόμβοι **ενταχθούν στο S** (λυμένο δίκτυο). Όταν δεν υπάρχει άμεση σύνδεση (link) μεταξύ 2 κορυφών i και j θεωρούμε εκ προοιμίου ότι η απόσταση τους είναι άπειρη και γράφουμε $d(i,j)=\infty$.

Επί της ουσίας επικολλάται μια **ετικέτα (label) σε** κάθε κόμβο ως αναγνωριστική κατάσταση που πληροφορεί για την απόσταση που τον χωρίζει από τον αρχικό κόμβο. Ο αλγόριθμος υπολογίζει τις αποστάσεις όλων των κορυφών από μια δοθείσα αρχική κορυφή (αφετηρία). Κάθε κόμβος **v** χαρακτηρίζεται από 2 σημαντικά στοιχεία:

- την τιμή d(v) που ορίζει την απόσταση του v από την αφετηρία s και
- μια ετικέτα που δηλώνει αν η προηγούμενη τιμή d(v) είναι η ελάχιστη οπότε και αποκτά μόνιμο χαρακτήρα (permanent). Τότε ο κόμβος είναι λυμένος. Στην αντίθετη περίπτωση η ετικέτα είναι προσωρινή (temporary) μέχρι τη στιγμή που θα λυθεί κι αυτός.

Ο αλγόριθμος που μελετάμε εφαρμόζεται μόνο για θετικές χωρητικότητες-βάρη στις ακμές διότι η πορεία που ακολουθείται έχει αυξητικό χαρακτήρα, αφού προστίθενται αποστάσεις. Σε διαφορετική περίπτωση καταλήγουμε σε παραπλανητικά συμπεράσματα.

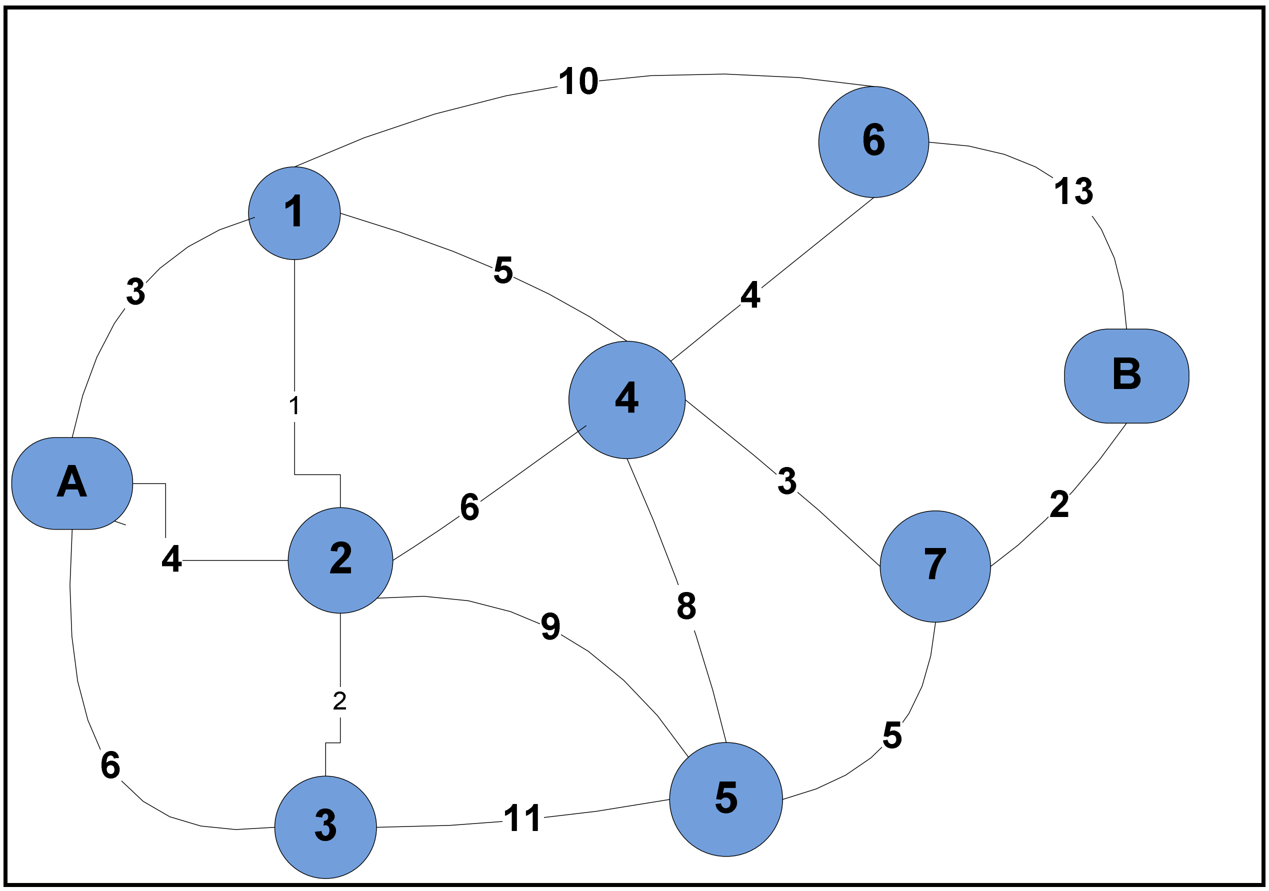
Πρόσφατες έρευνες [15] υπό την καθοδήγηση του *Δρος Nigel Raine* στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου *(''How bumblebees tackle the traveling salesman problem*'') έδειξαν ότι το πέταγμα των μελισσών ανάμεσα στα λουλούδια γίνεται ακολουθώντας τη συντομότερη διαδρομή. Πιο συγκεκριμένα, κάθε χώρο που συναντούν καταφέρνουν να τον χαρτογραφήσουν μ'έναν μαγικό και αυτόματο τρόπο στον εγκέφαλό τους ώστε να επισκέπτονται τελικά ένα τεράστιο πλήθος λουλουδιών διανύοντας την ελάχιστη απόσταση. Έτσι, αιωρούνται για ελάχιστο χρόνο εξοικονομώντας ενέργεια.

Ο τρόπος λειτουργίας εξηγείται σαφέστερα με τη χρήση ενός αναλυτικού παραδείγματος.

3.2 Πρόβλημα-παράδειγμα

Το συγκοινωνιακό δίκτυο της Αττικής επιτρέπει σ’έναν επισκέπτη της τη μετάβασή του στις περιοχές της με πλήθος εναλλακτικών επιλογών (τραμ, προαστιακός, ΜΕΤΡΟ, ΟΣΕ κτλ).

Έστω, λοιπόν, ότι κάποιος επιθυμεί από ένα άκρο Α (οικία) να φθάσει σε ένα άλλο άκρο Β (γήπεδο ποδοσφαίρου) διανύοντας τη μικρότερη απόσταση. Το πρόβλημα απεικονίζεται με το παρακάτω δίκτυο:



Σχήμα 3.2a

Φτιάχνουμε έναν πίνακα με την εξής δομή:

Σύνολο Λυμένων Κόμβων	**Ακμή Άμεσα Συνδεδεμένου Κόμβου**	**Προσωρινό Ελάχιστο Μήκος Διαδρομής**	**Λυμένος Κόμβος**	**Τελικό Μήκος Ελάχιστης Διαδρομής**
Λ={Α} + {1}	Α→1	**3**	1	3
	Α→2	4		
	Α→3	6		
Λ={Α,1}+ {2}	Α→2	**4**	2	4
	Α→3	6		
	1→6	3+10=13		
	1→4	3+5=8		
	1→2	3+1=4		
Λ={Α,1,2} + {3}	Α→3	**6**	3	6
	1→6	13		
	1→4	8		
	2→3	4+2=6		
	2→4	4+6=10		
	2→5	4+9=13		
Λ= {Α,1,2,3} + {4}	1→6	13		
	1→4	**8**	4	8
	2→4	10		
	2→5	13		
	3→5	6+11=17		
Λ={Α,1,2,3,4} + {7}	1→6	13		
	2→5	13		
	3→5	17		
	4→5	8+8=16		
	4→6	8+4=12		
	4→7	**8+3=11**	7	11
Λ={Α,1,2,3,4,7} + {6}	1→6	13		
	2→5	13		
	3→5	17		
	4→5	16		
	4→6	**12**	6	12
	7→5	11+5=16		
	7→Β	11+2=13		

Λ={A,1,2,3,4,6, 7} + {5}	2→5	**13**	5	13
	3→5	17		
	4→5	16		
	7→5	16		
	7→B	13		
	6→B	12+13=25		
Λ={A,1,2,3,4,5,6, 7} + {B}	7→B	**13**	B	13
	6→B	25		

Πίνακας 3.2.1

Ο πίνακας αποτελείται από 5 στήλες. Στην πρώτη στήλη έχουμε το σύνολο των λυμένων κόμβων που όπως φαίνεται στο παραδειγμά μας συμπληρώνεται βήμα προς βήμα. Στην πρώτη φάση ο λυμένος κόμβος είναι η Αφετηρία (Α) που εξ ορισμού έχει **μηδενικό** μήκος (διάρκεια,κόστος κτλ). Η πρώτη στήλη ολοκληρώνεται μόλις αναγραφούν όλοι οι κόμβοι.

Στη συνέχεια,στη $2^{η}$ στήλη περιγράφουμε συμβολικά τη σύνδεση των γειτονικών κόμβων. Εδώ ο Α συνδέεται με τους κόμβους 1 , 2 και 3 με μήκη-χωρητικότητες ακμών 3 ,4 και 6 αντιστοίχως. Ως προσωρινό και ελάχιστο μήκος ($3^{η}$ στήλη) θεωρούμε, προφανώς, το ελάχιστο από τις προηγούμενες τιμές και ο κόμβος στον οποίο συμβαίνει το παραπάνω ($4^{η}$ στήλη) λέμε ότι είναι **λυμένος** (εδώ ο 1). Τέλος, η τελευταία στήλη προσδιορίζει το ελάχιστο μήκος της διαδρομής που απαιτείται για να φθάσουμε από έναν τυχαίο κόμβο στο δίκτυο σ'έναν άλλον. Η διαδικασία χρειάζεται προσοχή από το $2^{ο}$ βήμα κι έπειτα. Στόχος μας είναι να ΄΄λύσουμε΄΄ όλους τους διαθέσιμους κόμβους γι'αυτό και οι υπολογισμοί των αποστάσεων επαναλαμβάνονται σε αρκετά βήματα μέχρι τη στιγμή που θα λυθούν.

Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε τους γειτονικούς κόμβους του Α. Επειδή ο κόμβος 1 είναι εγγύτερα σ'αυτόν με μήκος ακμής 3 συμπεραίνουμε ότι ο **1 είναι πλέον λυμένος** και ως ετικέτα βάζουμε τον αριθμό 3. Έτσι αποκτουμε άμεσα εικόνα για το πόσα βήματα χρειαζομάστε για να φτάσουμε από τον Α στον 1. Ομοίως οι κόμβοι **2 και 3** που δεν επελέγησαν τελικά παραμένουν **άλυτοι** φέρουν προσωρινή ετικέτα 4 και 6 αντίστοιχα.

Στη συνέχεια **αγνοώντας πια τον κόμβο 1** ξαναγράφουμε τις αποστάσεις από το Α μέχρι τον 2 και από τον Α μέχρι τον κόμβο 3 αφού όπως προείπαμε είναι άλυτοι

μαζί με τις ακμές του κόμβου 1 με τους υπόλοιπους γειτονικούς του κόμβους. Παρατηρούμε **ότι για κάθε κόμβο u** που ανήκει στο σύνολο S των λυμένων αναζητούμε το *μήκος της ακμής του με όλους τους γειτονικούς του κόμβους* ***w*** **από το σύνολο των άλυτων κόμβων U**. Και στο βήμα αυτό επιλέγουμε ως βέλτιστη τιμή τον ελάχιστο αριθμό που εν προκειμένω είναι το 4 για την ακμή Α→2. Συνεπώς ο κόμβος 2 λύθηκε και αποκτά (μόνιμη) ετικέτα 4. Με παρόμοιο τρόπο συμπληρώνεται ο πίνακας.

Προκειμένου,τώρα, να βρούμε τη βέλτιστη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσουμε καθώς και την ελάχιστη τιμή της έχουμε τα εξής:

Κόμβος	**Αμεσα και Βέλτιστα Προηγούμενος Κόμβος**	**Ελάχιστη Απόσταση**
Α	-	0
1	Α	3
2	Α	4
3	Α	6
4	1	8
5	2	13
6	***4***	***12***
7	4	11
Β	7	13

Πίνακας 3.2.2

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 3.2.1 βρίσκουμε τα παραπάνω σημαντικά αποτελέσματα που δίνουν ξεκάθαρη εικόνα για την πορεία του προβλήματος. Επομένως στον κόμβο 5 μπορούμε να **βρεθούμε ιδανικά** από τον κόμβο 2 διανύοντας το **λιγότερο** 13 μονάδες. Ο πίνακας 3.2.2 διαβάζεται αντίστροφα: Αν **για**

παράδειγμα κοιτάξουμε τον **κόμβο 6** διαπιστώνουμε ότι φτάνουμε σ'αυτόν από τον κόμβο 4 (από 2η στήλη). Συνεχίζοντας την ίδια πορεία στον κόμβο 4 οδηγούμαστε από τον κόμβο 1 που με τη σειρά του προήλθαμε από τον Α-αφετηρία. Συνολικά ο κόμβος 6 απέχει 12 μονάδες από το σημείο αφετηρίας.

Ο πίνακας 3.2.2 δίνει τον επόμενο που απαντά πλήρως στα ερωτήματα συντομότερης διαδρομής.

Κόμβος	**Βέλτιστη Διαδρομή**	**Ελάχιστη Απόσταση**
Α	-	0
1	Α→1	3
2	Α→2	4
3	Α→3	6
4	Α→1→4	8
5	Α→2→5	13
6	Α→1→4→6	12
7	Α→1→4→7	11
Β	Α→1→4→7→Β	13

Πίνακας 3.2.3

Ο πίνακας 3.2.3 αναπαριστά το μονοπάτι που οδηγεί σε οποιοδήποτε κόμβο του δικτύου υπολογίζοντας και την ελάχιστη απόσταση για να συμβεί αυτό.

Συνεπώς η βέλτιστη ή αλλιώς η συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο αρχής Α ως τον κόμβο πέρατος Β έχει μήκος 13 μονάδες και το μονοπάτι έχει την πορεία : Α→1→4→7→Β.

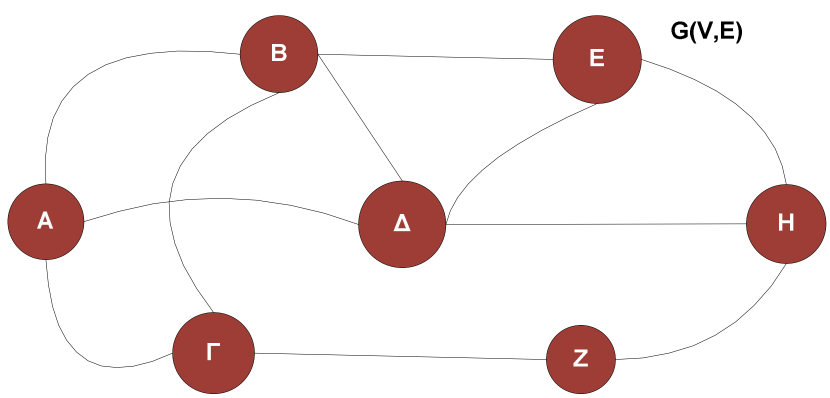
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το πρόβλημα του δένδρου ελάχιστης κάλυψης (spanning tree)

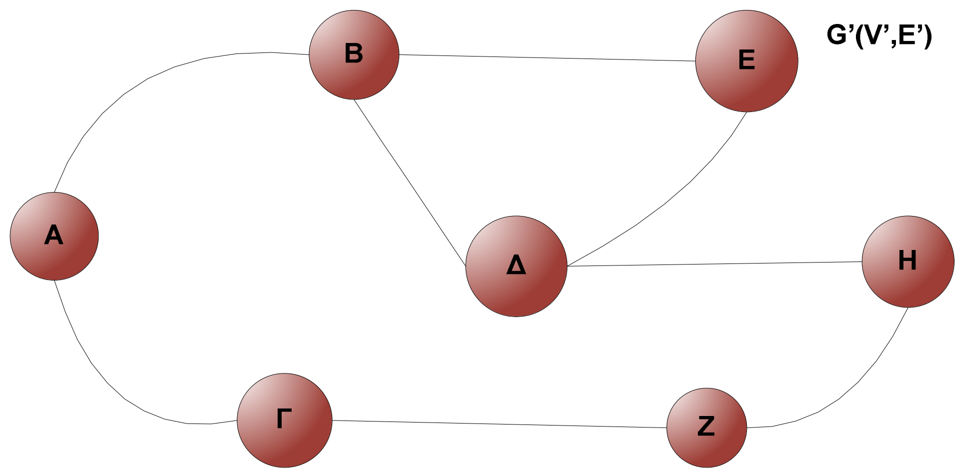
4.1 Περιγραφή-Ορισμοι εννοιών

Παρόμοια χαρακτηριστικά με το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής είναι κι αυτό του δέντρου ελάχιστης κάλυψης [12]. Όπως και πριν, αναφέρεται στην περίπτωση των συνεκτικών και μη προσανατολισμένων δικτύων όπου οι κορυφές (κόμβοι) συνδέονται με ακμές που φέρουν συγκεκριμένη (θετική) χωρητικότητα.

Θυμίζουμε ότι **δέντρο** είναι το συνεκτικό γράφημα που δεν περιλαμβάνει κύκλους. **Υπογράφημα** (sub graph) [4] του G(V,E) είναι ένα γράφημα G’(V’,E’) με V’⊆V και E’⊆E.



4.1a Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου γραφήματος G(V,E) με V={A,B,Γ,Δ,E,Z,H} και E={(AB),(AΓ),AΔ),(BΓ),(BE),(BΔ),(ΓZ),(ΔH),(EH),(ZH)}



4.1b Το **αντίστοιχο υπογράφημα G’(V’,E’)** του G όπου ξεκάθαρα E’⊆E

Υπογράφημα κάλυψης [14] ή γεννητικό υπογράφημα (spanning sub graph) L(V’,E’) ενός γραφήματος G(V,E) είναι το γράφημα L στο οποίο περιέχονται όλες οι κορυφές του G, δηλαδή V’=V καθώς και ένα μέρος των ακμών του, δηλαδή E’⊆E.

Δένδρο κάλυψης ή ζευγνύον δένδρο (spanning tree) T καλείται το υπογράφημα κάλυψης του G, ενώ **δέντρο ελάχιστης κάλυψης** (minimum spanning tree) T [12] του συνεκτικού και με βάρη γραφήματος G(V,E) είναι το δένδρο κάλυψης του οποίου το άθροισμα των βαρών (μηκών) είναι ελάχιστο.

Αντικειμενικός σκοπός εδώ είναι ο **εντοπισμός** των διαδοχικών εκείνων ακμών ώστε να σχηματίζεται το πιο σύντομο μονοπάτι για κάθε ζευγάρι κόμβων. Επομένως **δεν αναζητούμε** τη συντομότερη διαδρομή όπως περιγράψαμε στην ενότητα που προηγήθηκε **αλλά** τον ελάχιστο εκείνο αριθμό των κλάδων ανάμεσα σε όλους τους κόμβους του γραφήματος ώστε αφ’ενός να υπάρχει μονοπάτι για οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών και αφ’ετέρου το συνολικό μήκος των ακμών του να είναι το ελάχιστο δυνατό.

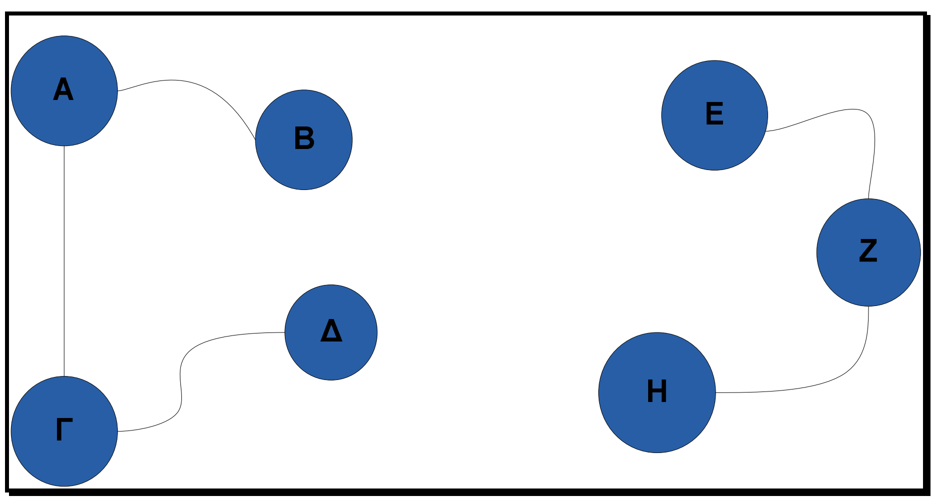
Ο τρόπος για να συμβεί αυτό περιγράφεται συνοπτικά με τα κάτωθι:

- Σε κάθε δίκτυο θα δίνονται οι κορυφές χωρίς όμως να είναι γνωστός ο τρόπος σύνδεσης μεταξύ τους. Επιπλέον, θα γνωρίζουμε τις ποσότητες που δυνητικά μπορούν να μεταφερθούν από τον ένα κόμβο στον επόμενο γειτονικό του.

- Το εγχείρημα περιλαμβάνει τον ειδικό εκείνο σχεδιασμό του δικτύου ώστε με την κατάλληλη εισαγωγή των λιγότερων δυνατών συνδέσεων (γραμμών) να εξασφαλίζεται η **αναγκαία προϋπόθεση** της σύνδεσης ανα δύο **όλων των κόμβων**.

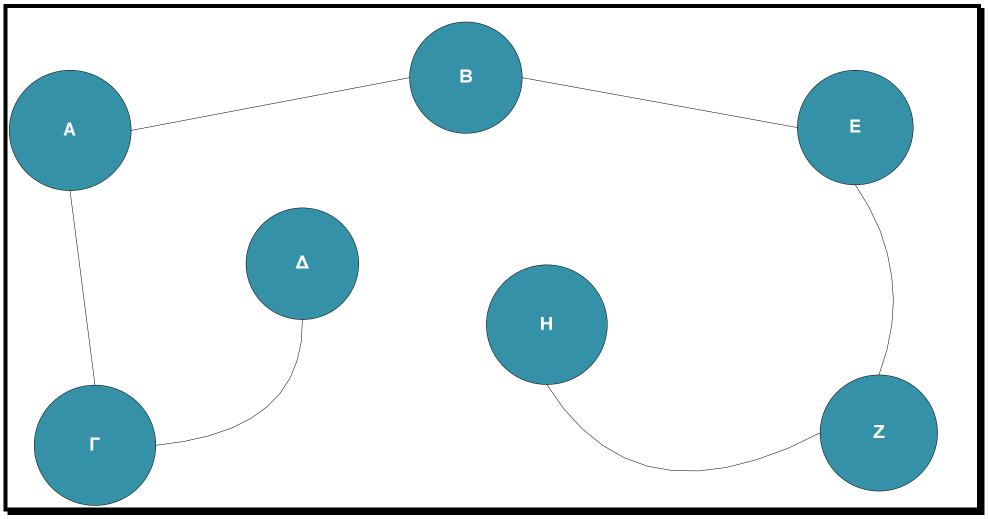
- Για να σχηματιστεί το επιθυμητό δέντρο για n κορυφές χρειάζεται να εισαγάγουμε n-1 ακμές το πολύ.

Παράδειγμα μη δέντρου



Σχήμα 4.1c

Παράδειγμα δέντρου ελάχιστης κάλυψης:



Σχήμα 4.1d

Είναι προφανές ότι τέτοια δέντρα έχουν ευρεία εφαρμογή σε πολλούς τομείς της ζωής μας όπως λόγου χάρη στις τηλεπικοινωνίες όπου αποφεύγουμε τη χρήση περιττών και δαπανηρών συνδέσεων και συνεπακόλουθα εξοικονομούνται οικονομικοί πόροι. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις δύο βασικότερες μεθόδους που επιλύουν με ακρίβεια και με τις λιγότερες πράξεις το ευρύ αυτό φάσμα των προβλημάτων.

4.2 Ο αλγόριθμος Prim

Ξεκινάμε κάθε φορά μ'έναν τυχαίο κόμβο {[2],[11]} που θα αποτελέσει την αφετηρία μας και στη συνέχεια βρίσκουμε τον εγγύτερο σ'αυτόν κόμβο και τους ενώνουμε με μία γραμμή. Ακριβώς μετά, προσδιορίζουμε τον επόμενο (μη συνδεδεμένο) κόμβο που βρίσκεται πλησιέστερα κι από τους 2 προηγούμενους και τους συνδέουμε. Η διαδικασία προχωρά με τον ίδιο τρόπο μέχρι να συνδεθεί και ο τελευταίος κόμβος. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το ζητούμενο δέντρο. Η επιλογή του πρώτου κόμβου δεν επηρεάζει τη διαδικασία και ανεξάρτητα από το με ποια κορυφή θα ξεκινήσουμε, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Συνοπτικά σε βήματα ο αλγόριθμος Prim έχει την εξής δομή:

1. Διάλεξε (τυχαία) έναν αρχικό κόμβο και προσδιόρισε τον πλησιέστερο σ’αυτόν κόμβο του γραφήματος

2. Βρες τον επόμενο μη συνδεδεμένο κόμβο που έχει τη μικρότερη απόσταση από τους ήδη συνδεδεμένους κόμβους. Αν δεν σχηματίζεται κύκλος, ένωσέ τους.

3. Συνέχισε με τρόπο ανάλογο του βήματος 2 μέχρι να συνδεθούν όλοι κόμβοι του γραφήματος.

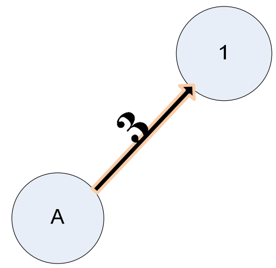
4.3.1 Παράδειγμα (Αλγόριθμος Prim)

Στην προσπάθεια να βρούμε το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο για το παράδειγμα του συγκοινωνιακού δικτύου της Αθήνας ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Επιλέγουμε τυχαία κάποιον κόμβο από τους 9 που συνίσταται το δίκτυο του προβλήματος. Έστω ότι παίρνουμε τον κόμβο Α. Ο εγγύτερος στον Α κόμβο με βάση τα μήκη των ακμών είναι ο κόμβος **1** διότι

$$\min\{A \to 1, A \to 2, A \to 3\} = \min\{3,4,6\} = 3.$$

Ενώνουμε, λοιπόν, τους 2 αυτούς κόμβους με μία γραμμή το **μήκος** της οποίας είναι 3.

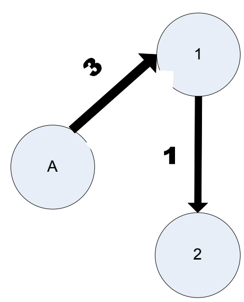


Σχήμα 4.3.1a

2. Στη συνέχεια εντοπίζουμε τον επόμενο,μη συνδεδεμένο με τους κόμβους **A** και **1** που στην προκειμένη περίπτωση είναι ο κόμβος **2** επειδή

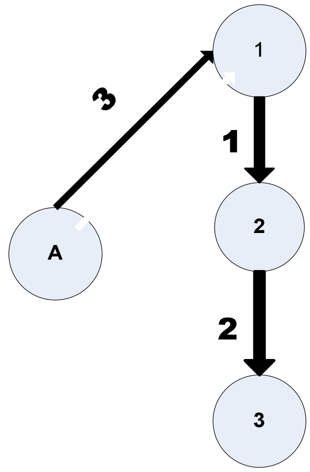
min{A→2, A→3, 1→2, 1→6, 1→4)=min{4, 6, 1, 10, 5}=1

και προκύπτει από την **ένωση** των κόμβων **1 και 2.** Προσθέτουμε, επομένως, τον κλάδο 1→2 και το **μήκος** πλέον της διαδρομής γίνεται 3+1=4



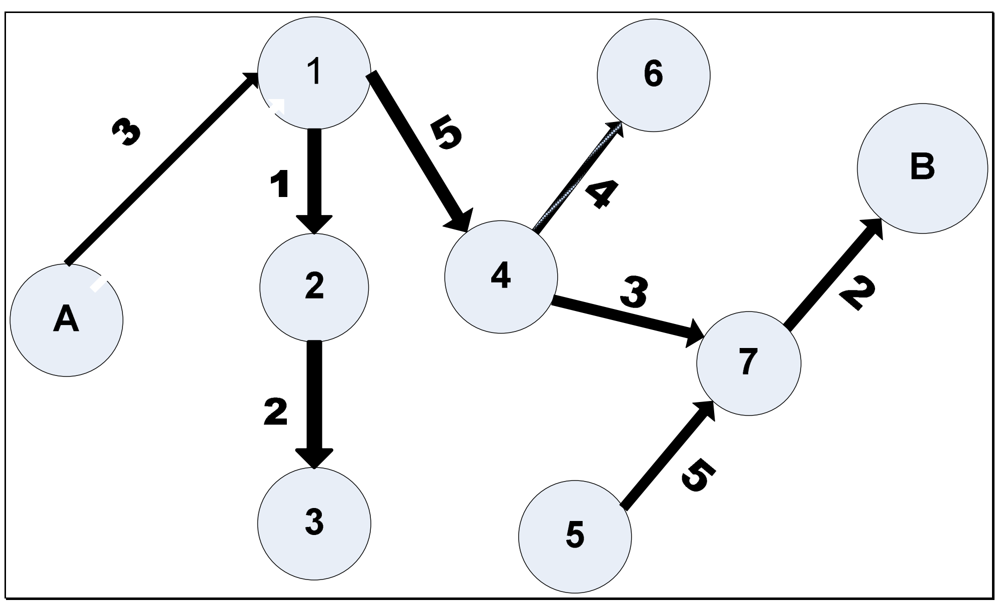
Σχήμα 4.3.1b

3. Αμέσως μετά, εντοπίζουμε τον κόμβο εκείνο που δεν είναι συνδεδεμένος με τους A, 1 και 2 και βρίσκεται πλησίεστερα σε κάποιον απ'αυτούς. Επειδή ακριβώς min{A→3, 1→6, 1→4, 2→4, 2→3}=min{6, 10, 5, 6, 2}=2 ο πλησιέστερος κόμβος είναι ο **3.** Ενώνοντας, τώρα, τον κόμβο 2 με τον 3 με κλάδο μήκους 2 σχηματίζεται ένα δέντρο με συνολικό μήκος (3+1)+2=6.



Σχήμα 4.3.1c

4. Ακολουθώντας την πορεία που υπαγορεύεται από τα βήματα που προηγήθηκαν σχεδιάζουμε το δέντρο ελάχιστης κάλυψης με συνολικό μήκος 3+1+2+5+6+3+5+2=27

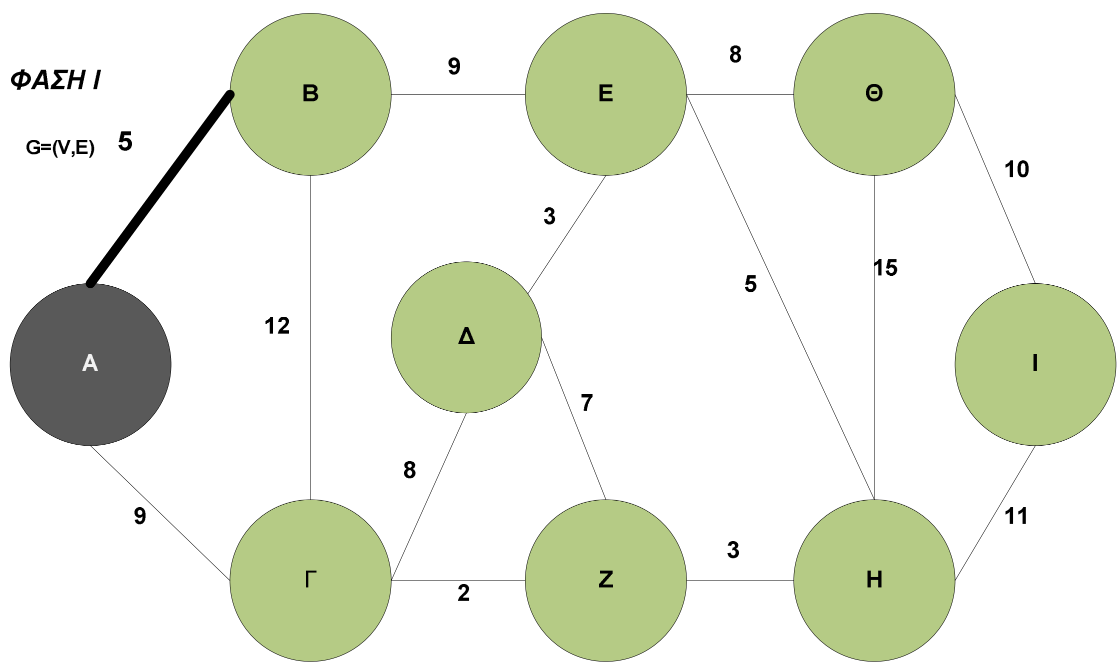


Σχήμα 4.3.1d

Από το παραπάνω σχήμα 4.3.1d φαίνεται ξεκάθαρα ότι στο τελικό δέντρο δεν εμφανίζονται κυκλικές διαδρομές.

4.3.2 Γενικό Παράδειγμα

Ο τηλεφωνικές εταιρείες εστιάζουν με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα ζευγνύοντα δένδρα διότι λαμβάνουν απαντήσεις και λύσεις σε κρίσιμα και πολύπλοκα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Ας υποθέσουμε, λοιπον, ότι έχουμε ένα δίκτυο τηλεφωνικών συνδέσεων **μεταξύ** 9 σταθμών και αναζητούμε το ελάχιστο πλήθος καλωδιώσεων ώστε να καταστεί εφικτή η επικοινωνία.

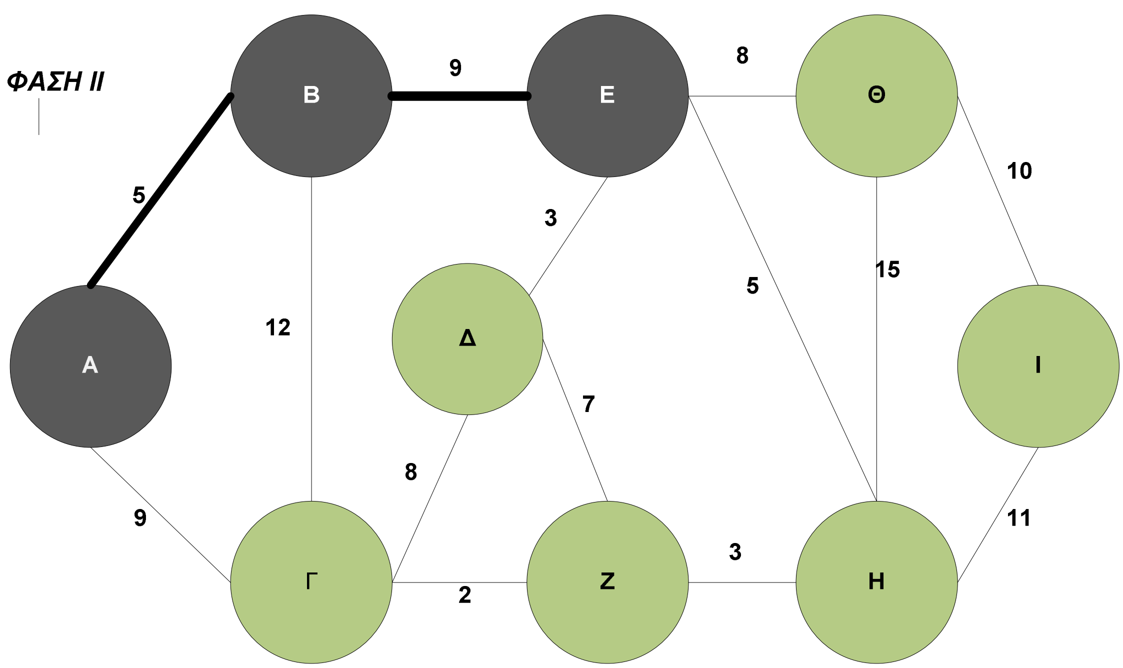


Σχήμα 4.3.2i

Παρατηρούμε ότι το δίκτυο περιέχει 9 κορυφές κι επομένως η βέλτιστη λύση πρέπει να έχει 9-1=8 ακμές που θα συνδέουν και τις 9 κορυφές.

ΦΑΣΗ I: Όπως περιγράφηκε παραπάνω στόχος είναι να συμπεριλάβουμε σ'ένα αρχικά κενό σύνολο όλες τις κορυφές του δικτύου προσβλέποντας στον ελάχιστο αριμό συνδέσεων και ελέγχοντας συνεχώς **τη μη ύπαρξη κύκλων** στο γράφημα που τελικά θα σχηματιστεί. Αν S είναι το σύνολο των κόμβων του υπογραφήματος για κάθε στάδιο επίλυσης, θα πρέπει στο τελευταίο βήμα *S=V* για το *G=(V,E).*

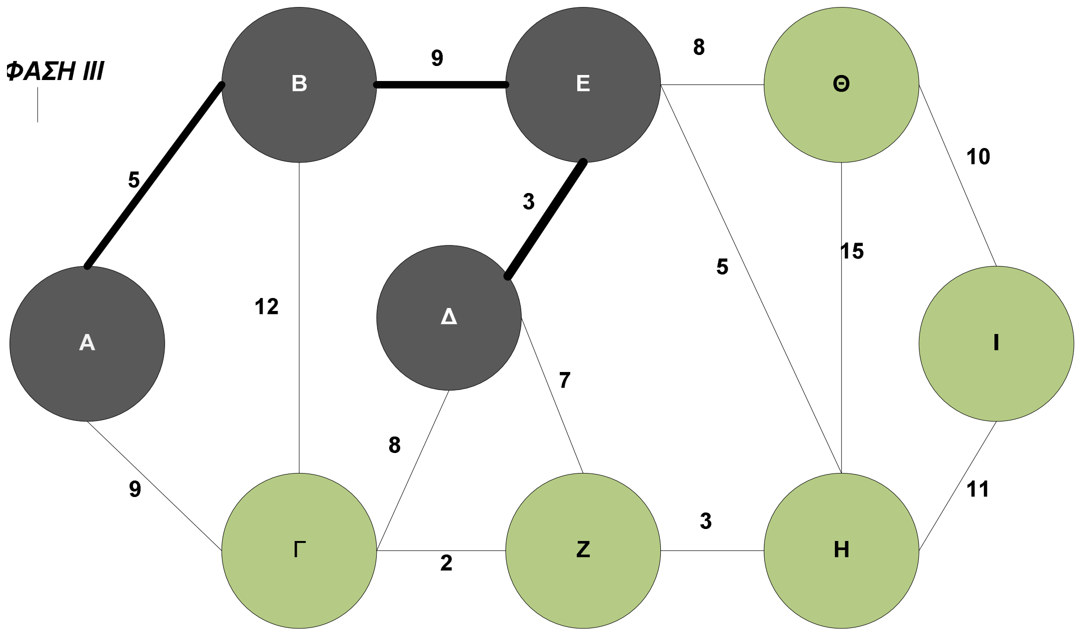
Παίρνουμε τυχαία τον κόμβο Α που θα αποτελέσει τη ρίζα του δέντρου κι επομένως *S = {A} με V\S = {Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ,Ι}* κι επειδή θέλουμε τη μικρότερη ακμή που συνδέει τον Α με τους υπόλοιπους έχουμε *min{(ΑΒ) , (ΑΓ)}= min{5,9} =5.*



Σχήμα 4.3.2ii

ΦΑΣΗ ΙΙ.

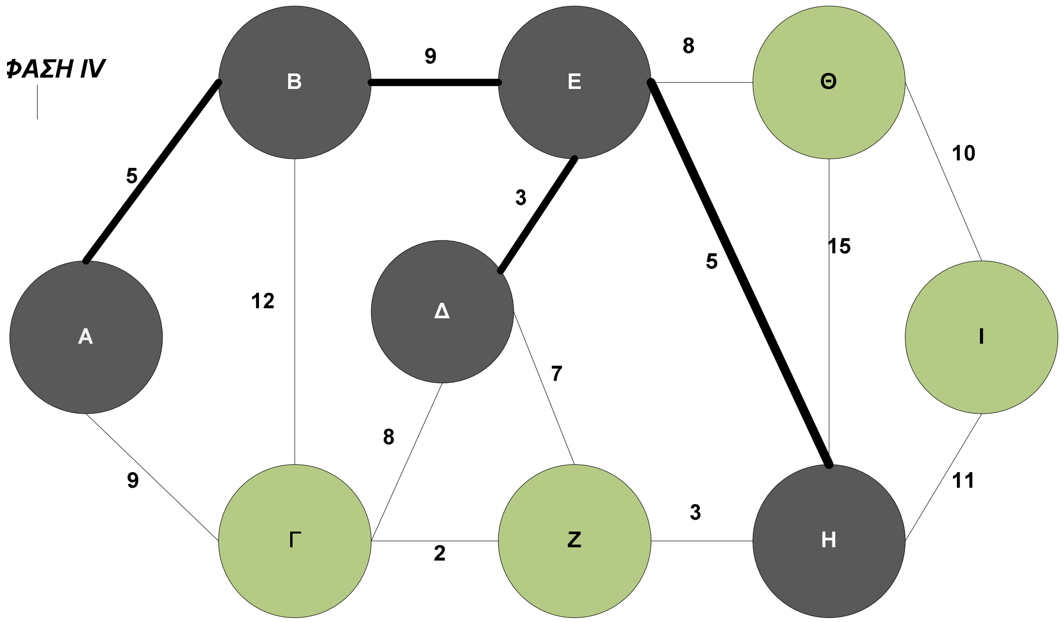
Έχοντας *S={A,B}* από την προηγούμενη φάση εξετάζουμε ποια είναι η μικρότερη σύνδεση ενός από τους Α και Β με τους υπόλοιπους μη συνδεδεμένους κόμβους (που δεν ανήκουν στο S). Επειδή min{ΑΓ,ΒΕ}=9 είτε για ΑΓ είτε για ΒΕ, επιλέγουμε να συνδέσουμε τους κόμβους Β και Ε. Άρα *S={A,B,E}* και προφανώς δε δημιουργείται κύκλος.



Σχήμα 4.3.2iii

ΦΑΣΗ ΙΙΙ

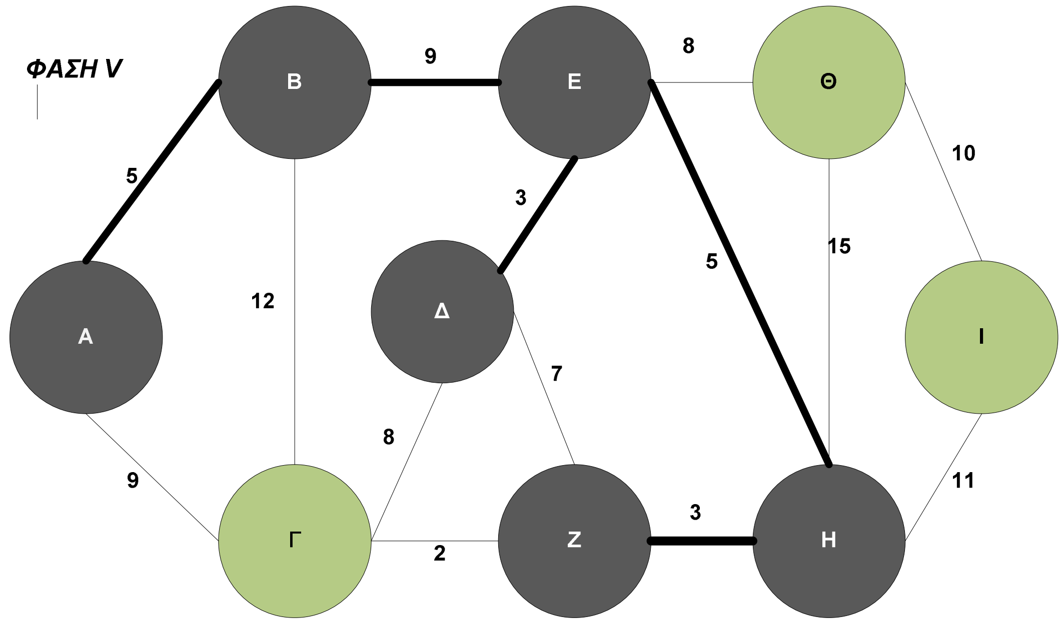
Από πριν έχουμε *S={A,B,E}* και επειδή *min{ΑΓ,ΒΓ,ΕΘ,ΕΗ}=3* που αντιστοιχεί στον κλάδο ΕΔ προκύπτει S={A,B,E} ∪ {Δ}.



Σχήμα 4.3.2iv

ΦΑΣΗ IV

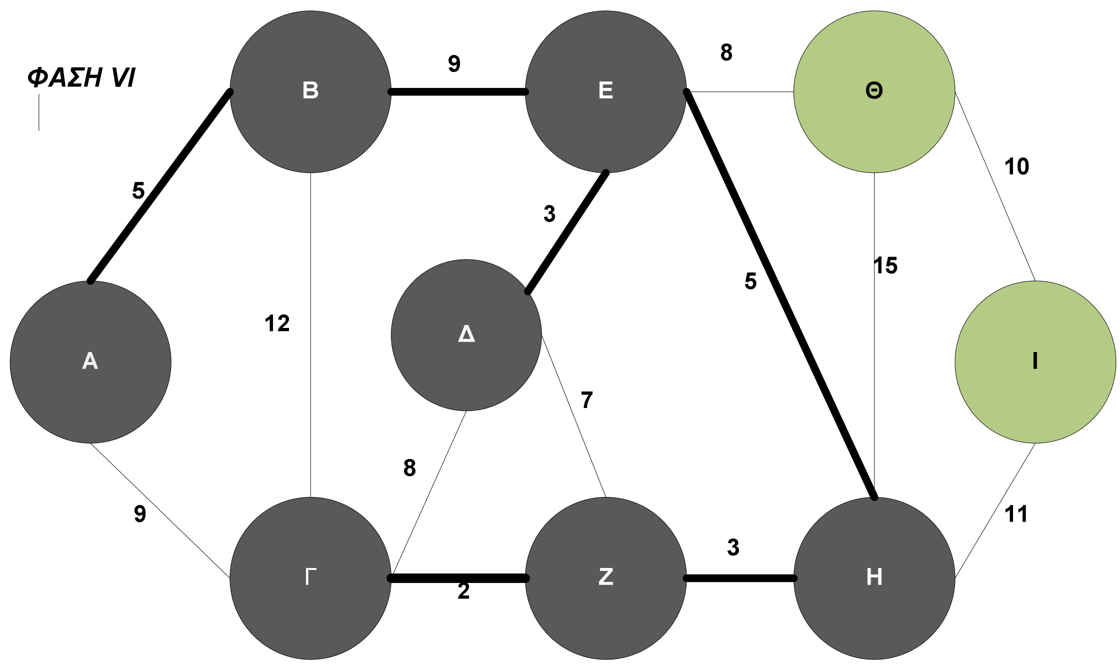
Στη φάση αυτή η συντομότερη ακμή που ενώνει κάποιον τους ήδη συνδεδεμένους κόμβους του *S={Α,Β,Δ,Ε}* με τους υπόλοιπους μη συνδεδεμένους από το *G\S={Γ,Ζ,Η,Θ,Ι}* είναι ο κλάδος ΕΗ με μήκος 5.



Σχήμα 4.3.2ν

ΦΑΣΗ V

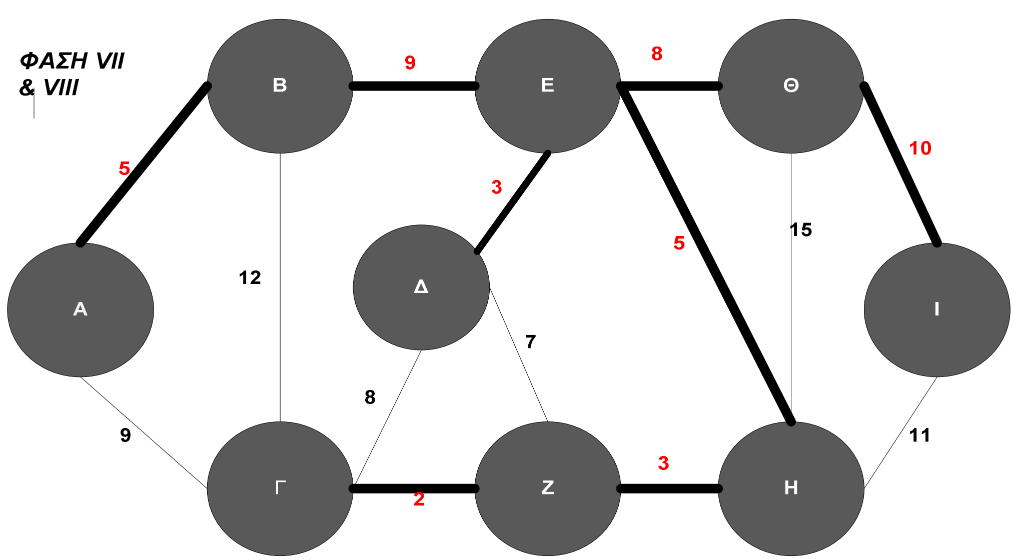
Από τον κόμβο Η μεταβαίνουμε στον κόμβο Ζ με μήκος 3(ελάχιστο δυνατό) και επομένως το S συμπληρώνεται με νέο στοιχείο το Η. Άρα *S={Α,Β,Δ,Ε,Η,Ζ}* και υπολείπονται οι κορυφές Γ, Θ και Ι.



Σχήμα 4.3.2vi

ΦΑΣΗ VI

Ομοίως ενώνεται η κορυφή Γ.Θυμίζουμε ότι σε κάθε βήμα προσέχουμε να μη **σχηματιστεί κύκλος** στο γράφημά μας.



Σχήμα 4.3.2vii

ΦΑΣΕΙΣ VII & VIII

Η διαδικασία **ολοκληρώνεται** με την προσθήκη κατά σειρά των κορυφών Θ και Ι. Να τονίσουμε εδώ ότι η ένωση των Α και Γ θα σχημάτιζε κύκλο και γι'αυτό επιλέγουμε τελικά άλλη διαδρομή. Επομένως το σύνολο S περιλαμβάνει όλους του κόμβους του δικτύου και το δέντρο ελάχιστης κάλυψης έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 4.3.2vii με συνολικό μήκος *5+9+3+5+3+2+8+10=45*. Βλέπουμε ακόμα ότι κι εδώ **για 9 κόμβους** στο γράφημα **χρειάζονται 9-1=8 κλάδοι** για να σχηματιστεί το ελάχιστα ζευγνύον δένδρο.

4.4 Αλγόριθμος Kruskal

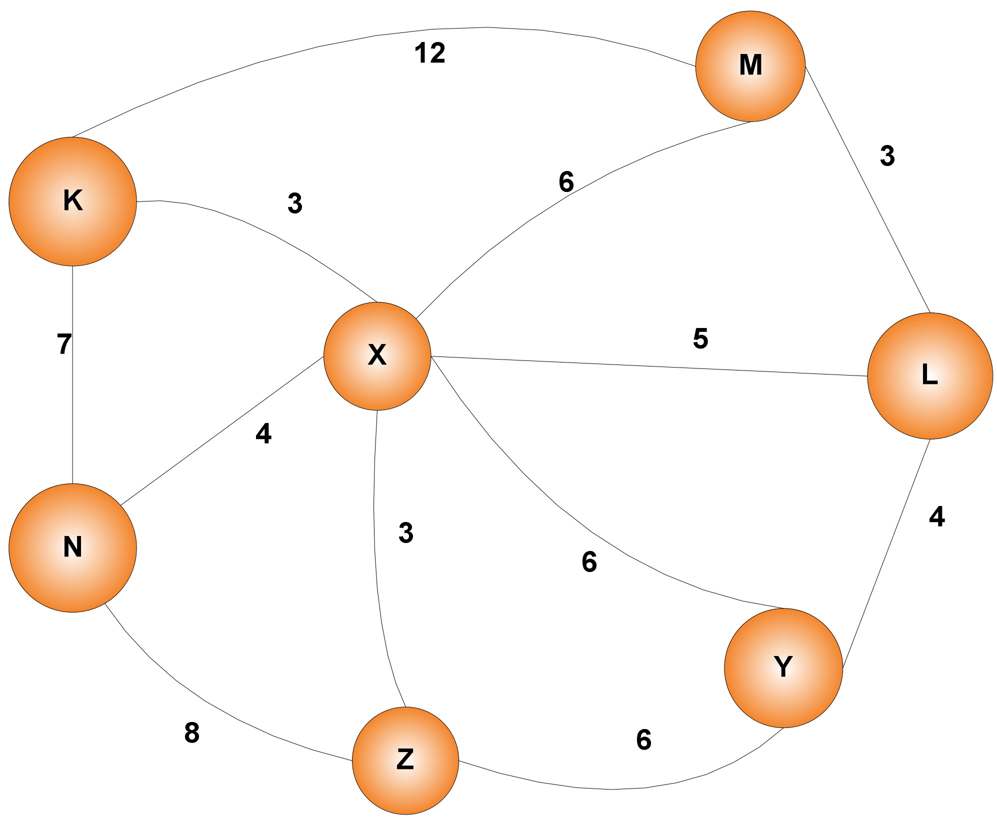
Τέλος, θα πρέπει να αναφέρθεί ότι εκτός από την προηγούμενη μέθοδο του Prim που αναπτύχθηκε εκτενώς, υπάρχουν κι άλλες ιδιαίτερα διαδεδομένες προεξαρχούσης εκείνης που εισήγαγε ο **Kruskal** [7]. Η μεθοδολογία επίλυσης διαφοροποιείται στο γεγονός ότι η διαδικασία ολοκληρώνεται σε 2 φάσεις. Αρχικά, προσδιορίζονται οι ακμές-κλάδοι με τις αντίστοιχες χωρητικότητές τους και τοποθετούνται κατά αύξον μήκος (α' φάση) και εν συνεχεία σχεδιάζονται οι κλάδοι ελέγχοντας ταυτόχρονα τη μη ύπαρξη κύκλων (β' φάση). Η διαφορά σε σχέση με αλγόριθμο Prim έγκειται στο γεγονός ότι στη θέση των κόμβων που επιλέγονται, έχουμε τις ακμές. Πιο συγκεκριμένα κάνουμε τα παρακάτω:

1) Κατατάσσουμε τους κλάδους με αύξουσα σειρά,
2) βρίσκουμε τον κλάδο με το μικρότερο μήκος και τον προσθέτουμε στο δένδρο,
3) προσθέτουμε τον αμέσως μικρότερο κλάδο στο δένδρο κι ελέγχουμε να μη σχηματιστεί κύκλος και
4) επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι.

Κι εδώ, αν το γράφημα έχει n κόμβους ο αλγόριθμος τερματίζει όταν υπάρξουν n-1 κλάδοι στο δένδρο. Με άλλα λόγια, σε κάθε στάδιο του Kruskal ΄΄ζωγραφίζονται'' **ξεχωριστά υποδένδρα** που τελικά **συγχωνεύονται** δίνοντας εκείνο της ελάχιστης κάλυψης.

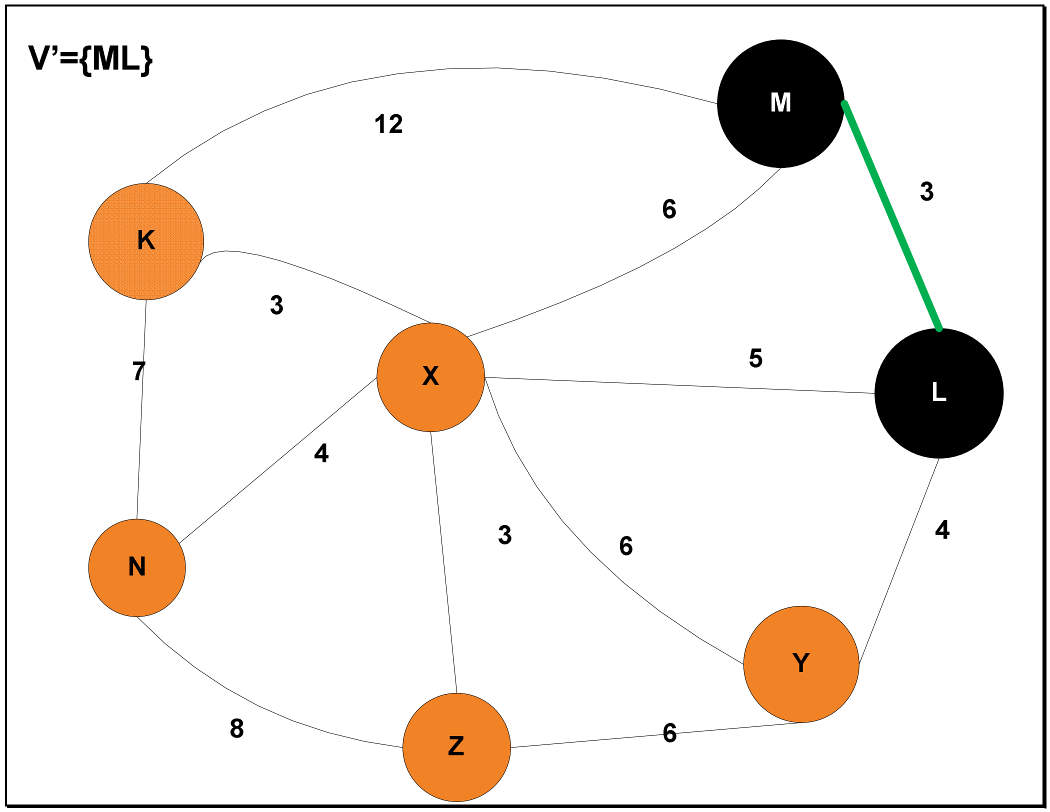
4.4.1 Παράδειγμα Αλγορίθμου Kruskal

Μια εταιρεία ταχυμεταφορών εκτελεί σε καθημερινή βάση μια σειρά εργασιών παράδοσης δεμάτων σε μια σειρά περιοχών στα Ιωάννινα. Γνωρίζοντας τα σημεία που πρέπει να επισκεφτει και τις αποστάσεις τους και προκειμένου να εξοικονομήσει καύσιμα για τα οχήματα που διαθέτει σχεδιάζει το παρακάτω δίκτυο:



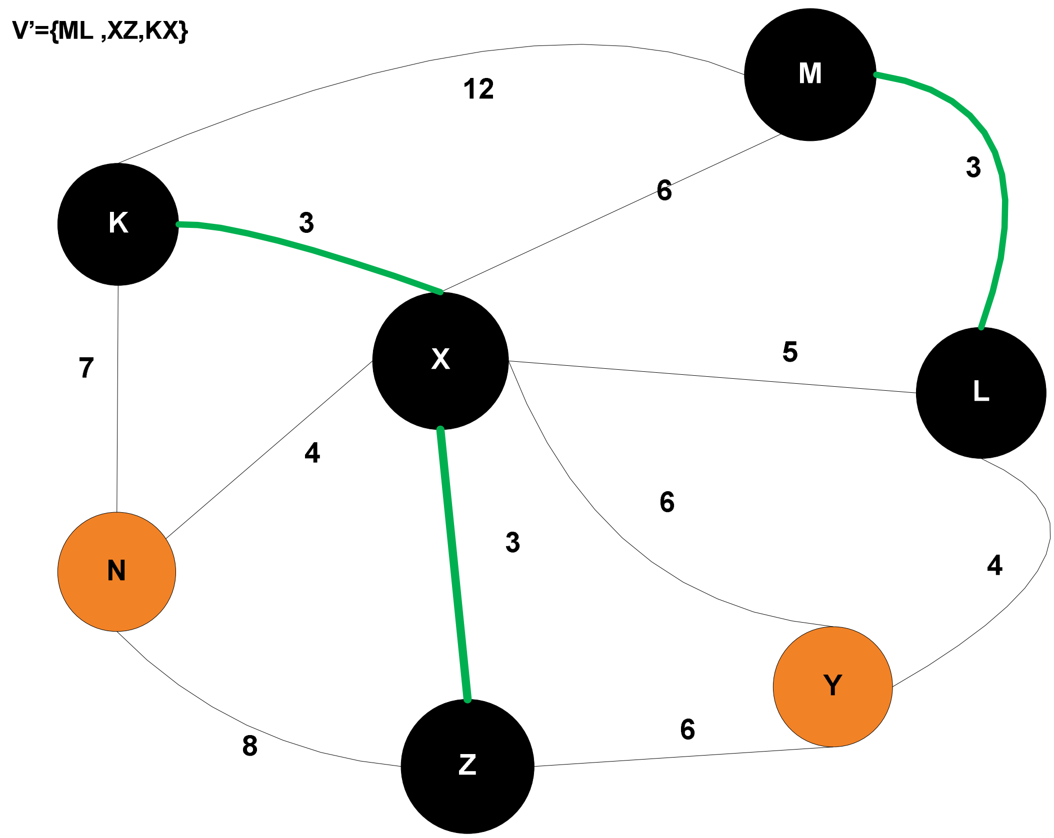
Σχήμα 4.4.1a

Ταξινομούμε τα μήκη των ακμών από το μικρότερο στο μεγαλύτερο κι έχουμε *V={ML,XZ,KX,NX,LY,XL,XY,ZY,XM,KN,NZ,KM}.* Επειδή η μικρότερη τιμή αντιστοιχεί σε 3 διαφορετικές ακμές με μήκη 3, τότε τυχαία επιλέγουμε την *ML* οπότε :



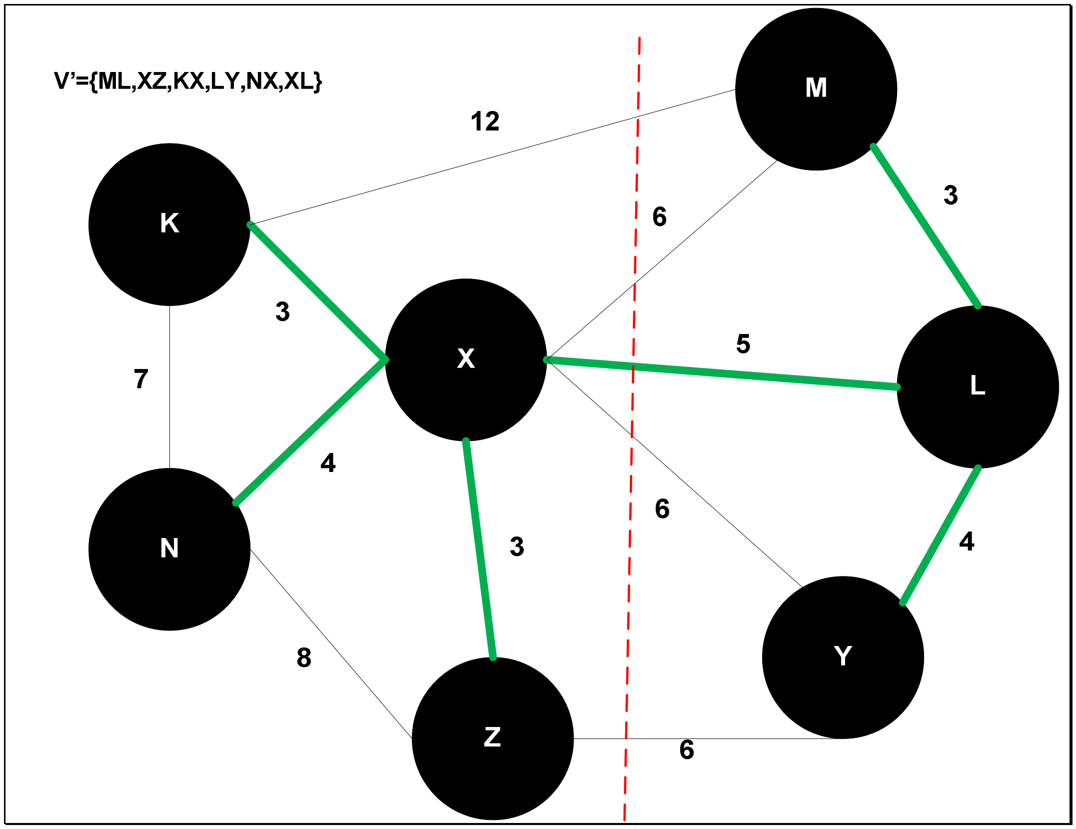
Σχήμα 4.4.1b

Αφού ενώσαμε τους κόμβους M και L, φέρνουμε διαδοχικά τους κλάδους XZ και KX χωρίς να δημιουργείται κύκλος.



Σχήμα 4.4.1c

Έχοντας εξαντλήσεις τις ακμές με μήκη 3, συναντάμε τις LY και NX με μήκη 4 αμφότερες. Ούτε η μεν ούτε η δε δημιουργεί προβλήματα (κύκλους) και άρα έχουμε:



Σχήμα 4.4.1d

Τέλος, ενώνουμε τα 2 υποδένδρα συνδέοντας την επόμενη μικρότερου μήκους ακμή *XL* και προκύπτει έτσι το δέντρο ελάχιστης κάλυψης.

Συνοψίζοντας ο αλγόριθμος και η στρατηγική επίλυσης του δέντρου ελάχιστης κάλυψης επιτρέπουν την ελαχιστοποίηση των συνδέσεων που καλούμαστε κάθε φορά να πραγματοποιήσουμε και γενικότερα τον οικονομικότερο τρόπο κατασκευής και προγραμματισμού εργασιών. Και οι 2 μέθοδοι χαρακτηρίζονται ως **άπληστες (greedy)** διότι κάθε φορά επιλέγουμε τις ακμές που θα συνδέσουν τις κορυφές **με βάση το ελάχιστό** τους μήκος (κόστος,βάρος,απόσταση κτλ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το πρόβλημα της Μέγιστης Ροής (Max Flow Problem)

5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα Μέγιστης Ροής σχηματοποιήθηκε αρχικά από τους *T. E. Harris* (1919-2005) και *F. S. Ross* προκειμένου να μετατρέψουν σε απλούστερη και άρα υπολογίσιμη μορφή το πολύπλοκο σιδηροδρομικό δίκτυο της πρ. Σοβιετικής Ένωσης [6]. Αργότερα με τη συμβολή των *Lester R. Ford Jr* και *Delbert R. Fulkerson* (1924-1976) έγινε ευκολότερος ο τρόπος υπολογισμού μέσω και του γνωστού αλγόριθμου Ford-Fulkerson.

Τέτοια προβλήματα παρατηρούμε συχνά στα δίκτυα μεταφορών (transport networks) αλλά και σε άλλα πεδία όπως στις γεωργικές εργασίες, στα συστήματα ύδρευσης κτλ. Οι τεχνικές και κατασκευαστικές εταιρείες οδοποιίας εφαρμόζουν τέχνικες ανάλογες με αυτές που θα περιγράψουμε για να υπολογίσουν τη μέγιστη ροή οχημάτων που διασχίζουν έναν δρόμο ώστε να πάρουν αποφάσεις διαπλάτυνσης και βελτιωτικών έργων. Σ’αυτά τα δίκτυα υπάρχουν τόξα αμφίδρομης κατεύθυνσης που για καθένα αντιστοιχεί μια μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα που δύναται να μεταφερθεί από έναν κόμβο σε άλλον. Ζητούμενο στα δίκτυα μεταφοράς είναι η μεγιστοποίηση της ροής από την πηγή(source) στον κόμβο προορισμού(target). Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων υπόκειται σε περιορισμούς και κανόνες που τα διαφοροποιούν σε σχέση με τα προηγούμενα θέματα της ανάλυσης δικτύων.

5.2 Ειδικά χαρακτηριστικά

Στο πρόβλημα μέγιστης ροής διαθέτουμε **μία πηγή** που παράγει μια ορισμένη ποσότητα **και έναν προορισμό** που δέχεται ένα μέρος της παραγόμενης ποσότητας καθώς αυτή διαμοιράζεται στους υπόλοιπους ενδιάμεσους,εσωτερικούς κόμβους. Η προσπάθεια μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα που θα καταλήξει εν τέλει στον κόμβο τέλους (προορισμό) χωρίς να παραβιάσουμε τους περιορισμούς χωρητικότητας των ακμών.

Το σκεπτικό επίλυσης που θα αναλυθεί παρακάτω στηρίζεται στην απαίτηση ότι σε κάθε κόμβο κατά μήκος της διαδρομής, η ποσότητα που καταλήγει σ'αυτόν δεν ξεπερνά την χωρητικότητα που μπορεί να ΄΄αντέξει΄΄ αυτός ο κόμβος.

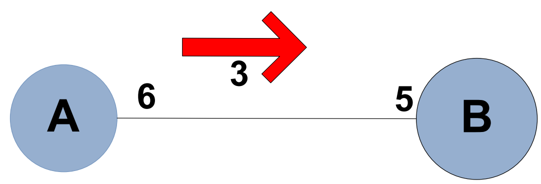
Κάθε ακμή μπορεί να έχει αμφίδρομη διεύθυνση και φέρει θετική χωρητικότητα. Η πηγή έχει μόνο εξερχόμενες ακμές ενώ ο προορισμός μόνο εισερχόμενες ακμές. Η ροή που εξέρχεται από έναν κόμβο είναι ίση με τη ροή που εισέρχεται (φθάνει) σ'αυτόν.

5.3 Αλγόριθμος Επίλυσης (Ford & Fulkerson)

Ο αλγόριθμος επίλυσης {[5],[6]} που προτάθηκε από τους Ford και Fulkerson (1955) χρησιμοποιεί δύο νέες έννοιες: υπολοιπόμενο δίκτυο (residual network) και επαυξάνον μονοπάτι (augment path). Υ**πολοιπόμενο** είναι το δίκτυο που απομένει μετά την εκτέλεση κάθε βήματος κατά τη λύση και στο οποίο έχει σημειωθεί μεταφορά μιας ποσότητας μεταξύ των κόμβων. Στη νέα εικόνα του δικτύου οι χωρητικότητες των ακμών έχουν αλλάξει και πιο συγκεκριμένα όταν η ροή εξελίσσεται σε μια **ορισμένη διεύθυνση**,τότε **αφαιρούμε** το ποσό αυτό της ροής από τη χωρητικότητα που απομένει **σ'αυτήν τη διεύθυνση** και **προσθέτουμε** το ίδιο ποσό στην **αντίθετη διεύθυνση.** Αυτό εξηγείται σαφέστερα με το ακόλουθο παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι 2 κόμβοι Α και Β συνδέονται μεταξύ σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

Δηλαδή αν η χωρητικότητα της ακμής A→B είναι 6 μονάδες και αντιστοίχως της B→A είναι 5, τότε αν υποθέσουμε ότι η ροή από τον κόμβο A στον κόμβο B είναι 3 μονάδες τότε θα έχουμε την εξής μεταβολή:



Συνεπώς, η απομένουσα χωρητικότητα για τη ροή *από τον A στον B* **μειώθηκε** από 6 σε 3 μονάδες (αποτέλεσμα της ροής που προηγήθηκε) ενώ η απομένουσα χωρητικότητα *από κόμβο B στον A* **αυξήθηκε** από 5 σε 8.

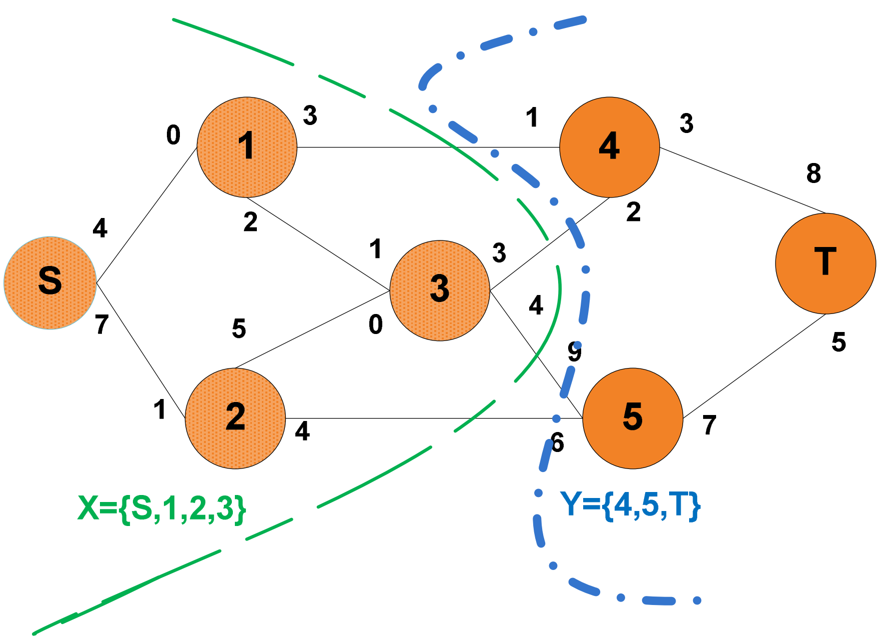
Επαυξάνον (augment path) [6] είναι το προσανατολισμένο **μονοπάτι** από την αφετηρία-πηγή προς τον προορισμό-δέκτη διαμέσου του υπολοιπόμενου δικτύου ώστε κάθε ακμή που συνδέει ανα δύο τους κόμβους σ'αυτό το μονοπάτι να έχει **αυστηρά θετική χωρητικότητα** (μη μηδενική). Με άλλα λόγια, είναι το μονοπάτι στο οποίο οι ''τελικές'' ακμές του έχουν χωρητικότητες διαφορετικές του μηδενός. Σε κάθε βήμα, κατά την εκτέλεση της λύσης βρίσκουμε την ελάχιστη από τις χωρητικότητες που απομένουν δηλαδή εκείνη ακριβώς την ποσότητα που επιτρέπεται να μεταφερθεί στο μονοπάτι.

Ορισμός (Επαυξάνον Μονοπάτι): Αν $G(V,E)$ το δίκτυο, c η χωρητικότητα των ακμών και f $η$ $ροή$ $στο$ G $τότε$: Το *p (path)* είναι επαυξάνον αν

- *δεν έχει κύκλους*
- *η αρχή του p είναι η αρχή του δικτύου, δηλαδή το s και πέρας του p είναι το πέρας του δικτύου, δηλαδή το t και τέλος*
- $f(u,v) < c(u,v)$ *για όλες τις ακμές (u,v) στο δίκτυο.*

Κάθε μονοπάτι επιλέγεται τυχαία αρκεί να οδηγεί από την πηγή στον προορισμό. Η διαδικασία τερματίζεται μόλις εκλέιψουν οι διαδρομές με θετική χωρητικότητα από την αφετηρία στο πέρας, ήτοι όταν δε θα υπάρχουν άλλα επαυξάνοντα μονοπάτια.

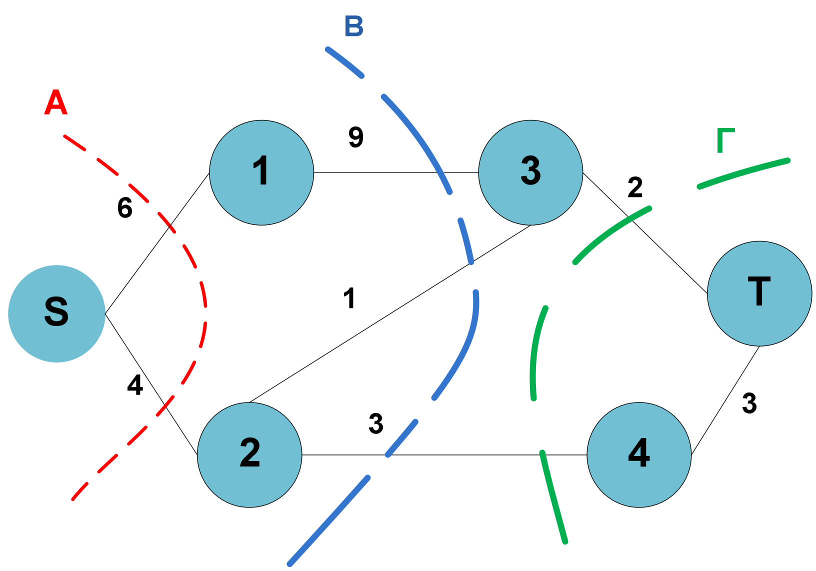
Οι Ford-Fulkerson εισήγαγαν την έννοια της τομής ενός δικτύου. **Τομή (cut flow) [6]** ενός δικτύου μεταφοράς είναι μια τομή του γραφήματος που διαχωρίζει την πηγή-είσοδο από τον προορισμό-έξοδο. Η χωρητικότητα της κάθε τομής υπολογίζεται από το άθροισμα των χωρητικοτήτων των κλάδων που τέμνει και που έχουν κατεύθυνση από την είσοδο προς την έξοδο. Τομή (X,Y) είναι μια διαμέριση του συνόλου V δηλαδή: $V = X \cup Y$ $με$ $X \cap Y = \emptyset$ $ώστε$ $x \in X$ $και$ $y \in Y$.



Σχήμα 5.3a

Ροή κατά μήκος μιας τομής (X,Y) ορίζεται η συνάρτηση $f(X,Y)$ ενώ χωρητικότητα κατά μήκος της (X,Y) ορίζεται η $c(X,Y)$.

Για να γίνουν κατανοητές οι προηγούμενες έννοιες κρίνεται σκόπιμη η χρήση ενός απλού παραδείγματος. Στο σχήμα 5.3b απεικονίζεται ένα δίκτυο μεταφοράς πετρελαίου από την δεξαμενή – πηγή S στην δεξαμενή – προορισμό T διαμέσου των κορυφών 1, 2, 3 και 4. Αν χωρίσουμε το γράφημα σε 3 επιμέρους υπογραφήματα έχουμε τις εξής **τομές**:



Σχήμα 5.3b

[A; (S,1) , (S,2)] με χωρητικότητα 6+4=10 μονάδες,

[B; (1,3), (2,3), (2,4)] με χωρητικότητα 9+1+3=13 μονάδες και

[Γ; (3,T), (2,4)] με χωρητικότητα 2+3=5 μονάδες αφού η τομή Γ (πράσινη γραμμή) ακουμπά στους κλάδους (3,T) και (2,4).

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την επίλυση τέτοιων δικτύων συνοψίζονται με το ακόλουθο χρήσιμο θεώρημα:

Θεώρημα Μέγιστης Ροής και Ελάχιστης Τομής

Σε ένα δίκτυο μεταφοράς η μέγιστη τιμή της ροής που διαχέεται σ’αυτό είναι ίση με την ελάχιστη από τις χωρητικότητες όλων των δυνατών τομών του δικτύου [6].

Αν θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε το κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E) τότε **θετική ροή** στο δίκτυο καλείται η συνάρτηση

$$f : V \; x \; V \rightarrow R^{+}$$

που υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς:

1. $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ *(περιορισμός χωρητικότητας)*
   όπου $c(u,v)$ είναι η μη αρνητική χωρητικότητα της ακμής από τον κόμβο u στον κόμβο v.
   Δηλαδή, η ροή κατά μήκος μιας ακμής δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητά της.
   Άμεση συνέπεια του περιορισμού χωρητικότητας είναι το παρακάτω λήμμα [2]:

   Η τιμή της ροής $\boldsymbol{f}$ στο δίκτυο $\boldsymbol{G}$ φράσσεται άνω από τη χωρητικότητα οποιασδήποτε τομής του $\boldsymbol{G}$.

2. $\forall u \in V - \{s,t\} \; ισχύει: \; \sum_{v \in V} f(u,v) \; = \; \sum_{v \in V} f(v,u)$ *(διατήρηση ροής)*
   δηλαδή όση ροή εισέρχεται σε έναν κόμβο τόση ροή εξέρχεται απ’αυτόν (με εξαίρεση τους κόμβους αρχής s και πέρατος t).

3. $\forall \; u,v \; \in V : f(u,v) = -f(v,u) \;\; (διαγώνια \; συμμετρία)$
   δηλαδή η συνολική ροή από τον u στον v είναι ίση και αντίθετη με τη συνολική ροή από τον v στον u.

Αν $G(V, E)$ το κατευθυνόμενο γράφημα με V: *το σύνολο των κορυφών (κόμβων)* και E: *το σύνολο των ακμών e για* $\forall\ v, u\ \in V$ τότε ορίζεται ως **υπολοιπόμενο δίκτυο (residual network) [6]** το δίκτυο $G_f\ (V, E_f)$ όπου $E_f \subseteq E$ με χωρητικότητα

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

Το υπολοιπόμενο δίκτυο περιέχει ακριβώς εκείνες τις ακμές του δικτύου που **επιδέχονται περισσότερη ροή**.

Έχουμε στην περίπτωση αυτή:

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V\ \mu\varepsilon\ c_f(u, v) \geq 0\}$$

Για κάθε ακμή $e(u, v)\ \tau o\upsilon\ G$ με $f(u, v) = f(e) < c_e$ υπάρχουν $c_e - f(e)\quad (*)$ μονάδες χωρητικότητας ελεύθερες.

Επομένως συμπεριλαμβάνουμε στο υπολοιπόμενο δίκτυο G_f την ακμή $e(u, v)$ με χωρητικότητα ίση με τη διαφορά στη σχέση (*). Τέτοιες ακμές λέγονται **ευθύγραμμες** (forward edges) [7].

Συνεπώς η υπολοιπόμενη χωρητικότητα $c_f(u, v)$ κάθε ακμής $e = (u, v)$ του υπολοιπόμενου δικτύου είναι η τιμή που ισούται με την αρχική χωρητικότητα $c(u, v)$ της ακμής e ελαττωμένη κατά την τρέχουσα ροή $f(u, v)$. Να τονίσουμε δώ ότι **δεν** ισχύει πάντα ότι $E_f \subseteq E$ διότι αν

$$(v, u) \in E\ \kappa\alpha\iota\ f(v, u) > 0\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\pi\iota\pi\lambda\acute{\varepsilon}o\nu\ (u, v) \notin E$$

$$\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ c(u, v) = 0\ (\varepsilon\xi\ o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon})\ \kappa\alpha\iota$$

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) = 0 - f(u, v) = -f(u, v) = f(v, u).$$

Άρα $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E_f}$.

Γενικά για τη θετική ροή $p(u, v)$ ισχύει:

$$p(u, v) = \left\{ \begin{array}{ll} f(u, v), & \alpha\nu\ f(u, v) > 0 \\ 0, & \alpha\nu\ f(u, v) \leq 0 \end{array} \right\}$$

Τιμή $|\boldsymbol{f}|$ της ροής $\boldsymbol{f}$ είναι η ροή δικτύου που καταλήγει στο πέρας t (sink).

Δηλαδή: $|f| = \sum_{v \in V} f(v,t)$

Η Θετική Ροή $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ από τον κόμβο u στον v ορίζεται από τη σχέση:

$$f(u,v) = p(u,v) - p(v,u)$$

Αλγόριθμος Ford – Fulkerson

Αν f είναι η ροή από $u \rightarrow v$ **τότε:**

- Ελάττωσε κατά f τη χωρητικότητα $c(u,v)$ $και$
- Αύξησε κατά f τη χωρητικότητα $c(v,u)$.

Έτσι εξασφαλίζεται η αρχή διατήρησης της ροής.

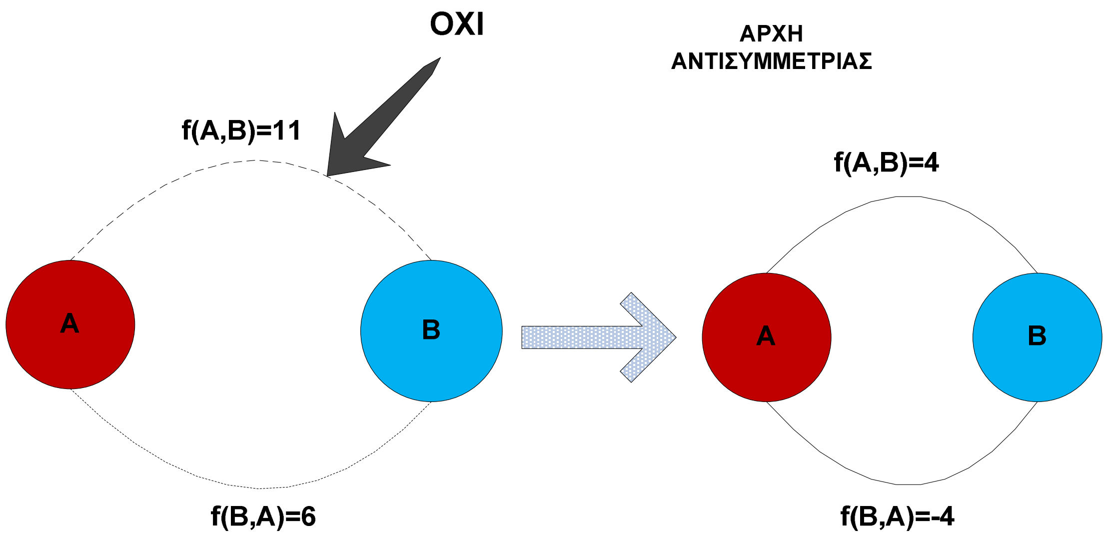
Ψευδοκώδικας Ford – Fulkerson

- Βάλε αρχική τιμή $f_{συνολ.}$=0
- ‘’Τρέξε’’ μια μη μηδενική ροή από s στο t
- Επανάλαβε ώσπου να μην υπάρχει μονοπάτι s□t
- Αν f είναι η ελάχιστη χωρητικότητα των ακμών κατά μήκος του μονοπατιού s□t , τότε πρόσθεσε f στο $f_{συνολ.}$
- Για κάθε ακμή $u \rightarrow v$ στο μονοπάτι
  1.μείωσε κατά f το $c(u,v)$
  2.αύξησε κατά f το $c(v,u)$.

Ο αλγόριθμος δεν μας περιορίζει στον τρόπο που θα επιλέξουμε τα επαυξάνοντα μονοπάτια. Ωστόσο, προτιμάμε εκείνα που είναι τα πιο αποδοτικά κάθε φορά για την εκάστοτε επαύξηση της ροής ώστε να έχουμε τα λιγότερες επαναλήψεις στη διαδικασία.

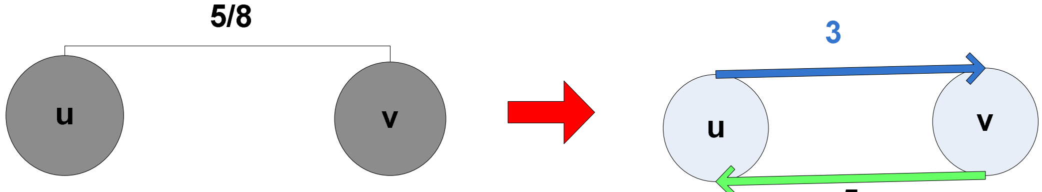
Κάθε ακμή $e \in G$ μπορεί να δημιουργήσει το πολύ 2 ακμές στο G_f κι επομένως το τελευταίο έχει το πολύ διπλάσιες ακμές από το αρχικό γράφημα G.

Παρατηρήσεις:



ΥΠΟΛΟΙΠΟΜΕΝΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

Αν συμβολίσουμε με $f(u,v)/c(u,$v) ροή που κυκλοφορεί στο δίκτυο και την αντίστοιχη χωρητικότητα της ακμής, εξετάζουμε το επόμενο παράδειγμα:



Από σχέση υπολογισμού υπολοιπόμενης χωρητικότητας έχουμε: $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

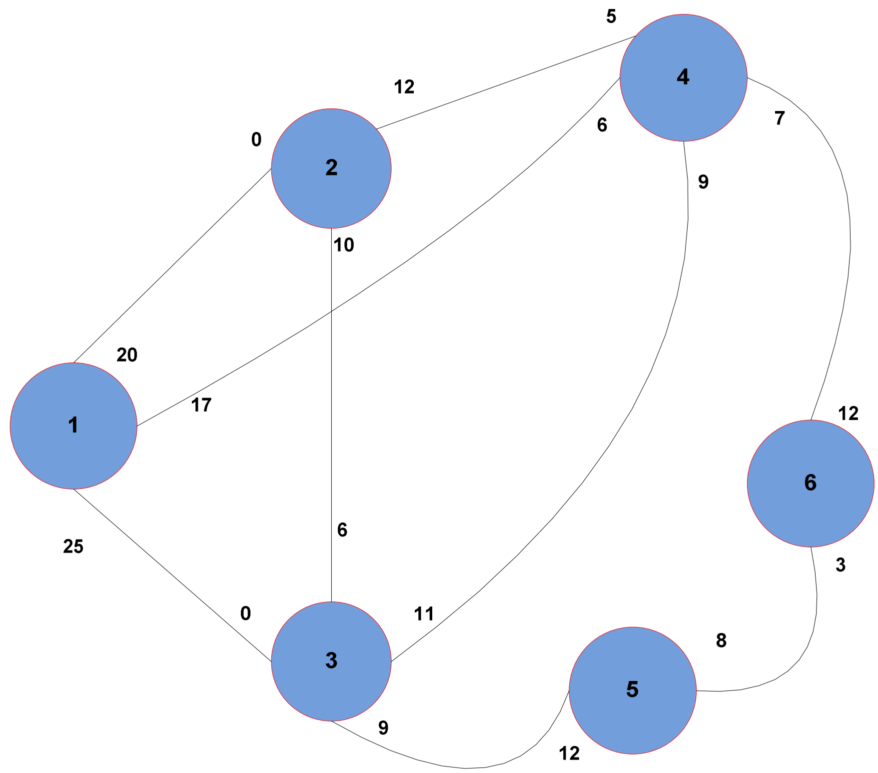
$c_f(u,v) = 8 - 5 = 3$ και $c_f(v,u) = 0 - (-5) = 5$

5.4 Παράδειγμα Ι

Η Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία χάρη στο υπερσύγχρονο δίκτυο μετεωρολογικών σταθμών που διαθέτει στην ελληνική επικράτεια έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει δεδομένα από τον έναν μετεωρολογικό σταθμό που βρίσκεται στη Σούδα σ'έναν άλλον που βρίσκεται στην Κάρπαθο. Ας υπουέσουμε, λοιπόν, ότι στο πλαίσιο της ενημέρωσης των καιρικών φαινομένων, επιθυμούμε τη μεταφορά δεδομένων από **τον κόμβο 1** που αποτελεί τον πομπό-εξυπηρετητή σ'έναν πιο απομακρυσμένο **κόμβο-αποδέκτη 6**. Οι ενδιάμεσοι κόμβοι είναι τα κατά τόπους μετεωρολογικά κέντρα που κι αυτά με τη σειρά τους δέχονται αλλά και αποστέλλουν πληροφορίες με τη μορφή Megabytes.

Στο πρόβλημά μας καλούμαστε να προσδιορίσουμε με ποιο τρόπο είναι εφικτό να φτάσουν 62 Mb δεδομένων από τον κόμβο 1 στον κόμβο 6, δηλαδή ποια πρέπει να είναι η βέλτιστη ροή δεδομένων ώστε να καταλήξει στον προορισμό τους (κομβος 6) η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα.

Η σχηματική απεικόνιση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

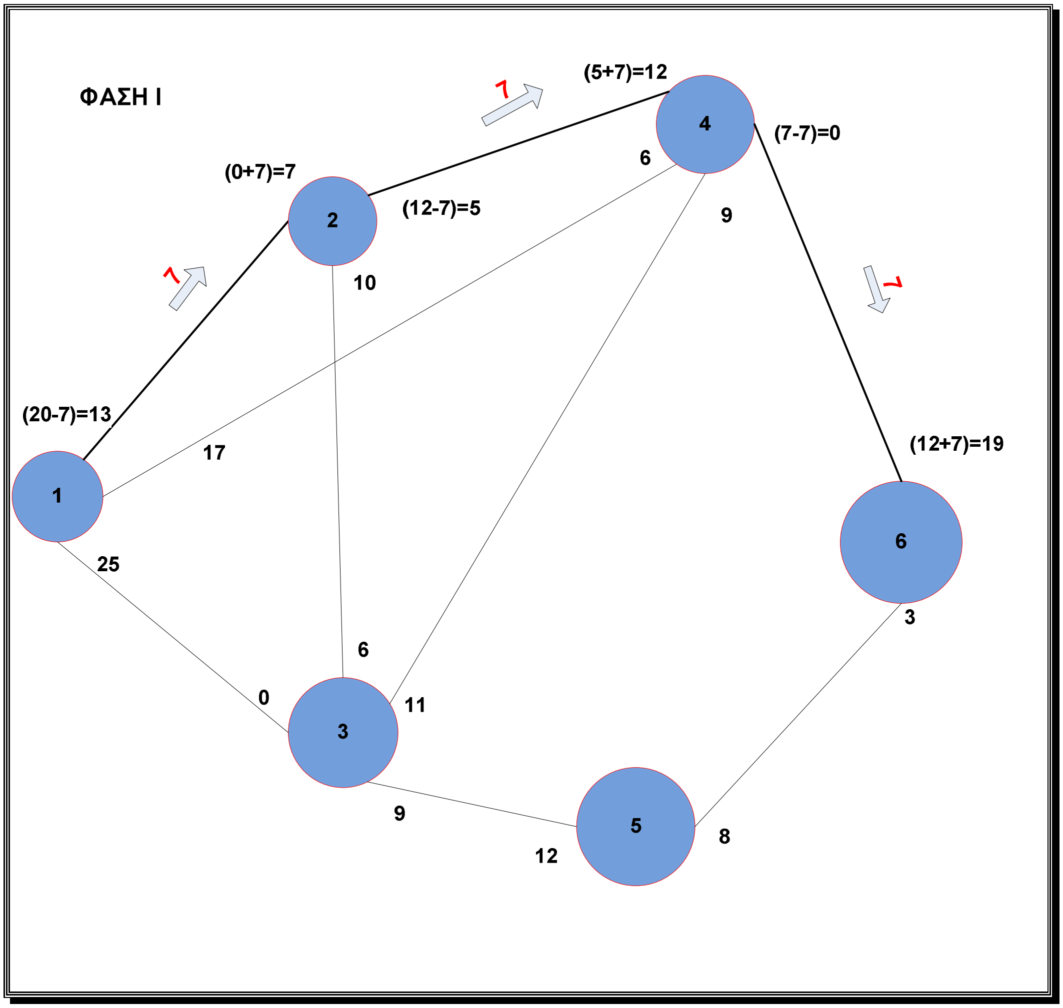


Σχήμα 5.4a

Θα επιχειρήσουμε να δώσουμε μια λύση. Φυσικά, ανάλογα με τις εναλλακτικές ροές που θα επιλεγούν, υπάρχουν και αντίστοιχες λύσεις.

1ο βήμα: Επιλέγουμε τυχαία το μονοπάτι 1→2→4→6 που αμέσως φαίνεται ότι έχει ελάχιστη δυναμικότητα ροής μη μηδενική. Όπως περιγράφηκε παραπάνω βρίσκουμε την **ελάχιστη από τις χωρητικότητες** των ακμών του μονοπατιού και αυτή ακριβώς είναι η **βέλτιστη ροή.**

Επειδή (1,2)=20 , (2,4)=12 και (4,6)=7 τότε στο μονοπάτι θα κυλήσει ροή 7 μονάδων. Το δίκτυο παίρνει νέα μορφή και γίνεται :



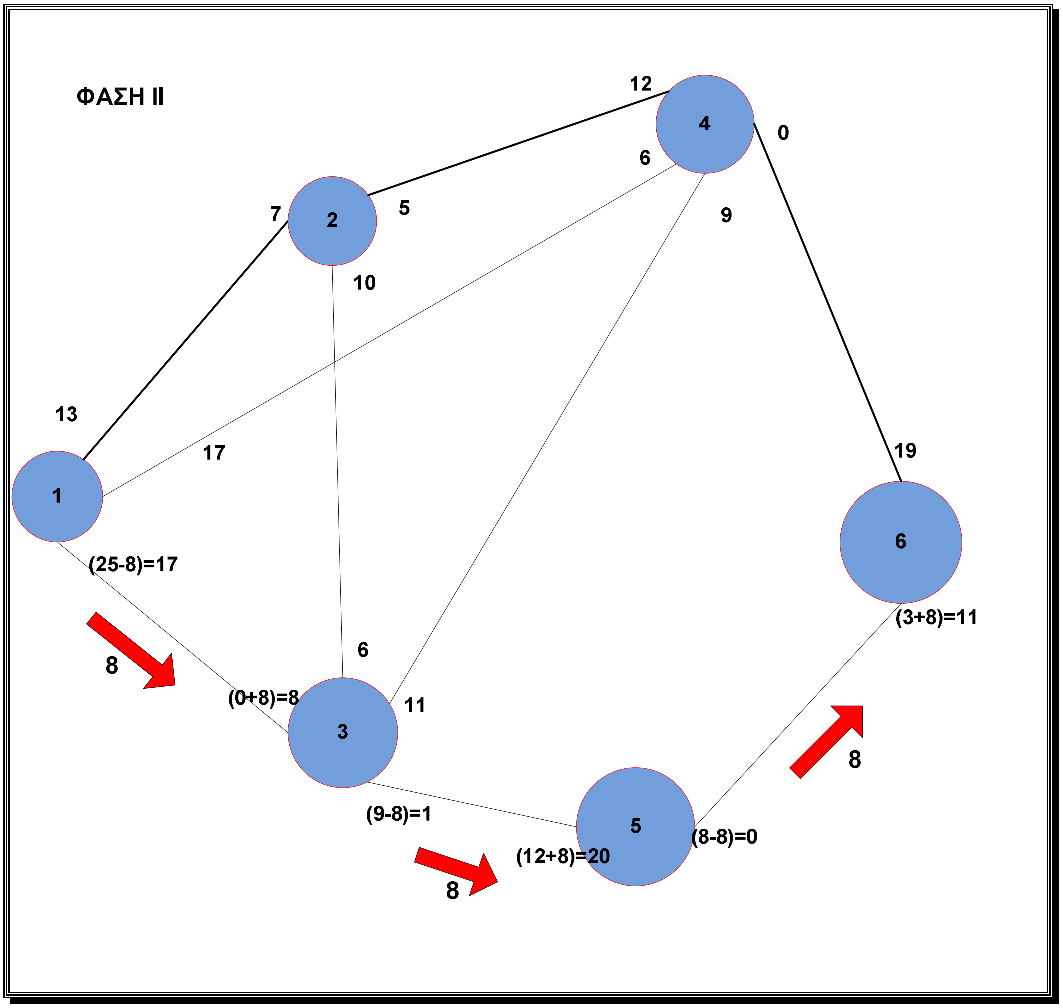
Σχήμα 5.4b

Μετά την αναπροσαρμογή των ροών προέκυψε το παραπάνω δίκτυο (Σχ. 5.4b).

2^{ο} Βήμα

Επιλέγουμε,τώρα,το μονοπάτι 1→3→5→6. Η μέγιστη ροή που επιτυγχάνεται είναι ίση με την ελάχιστη ροή των ακμών του.

Με το ίδιο σκεπτικό κι επειδή (1,3)=25, (3,5)=9 και **(5,6)=8** επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία κι έχουμε:



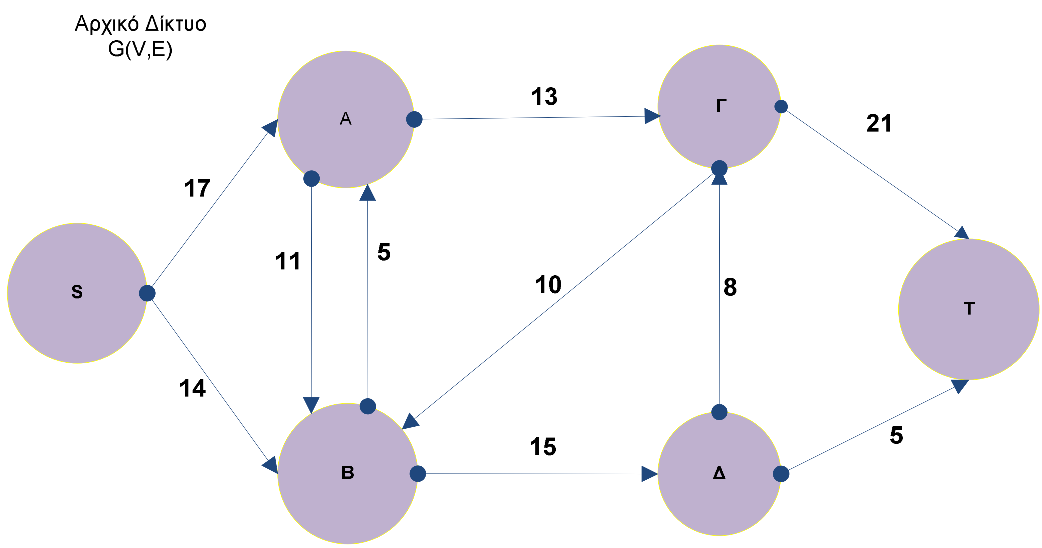
Σχήμα 5.4c

Επειδή εξαντλήθηκε η δυνατή ροή από τους κόμβους 4 και 5 που οδηγούν στον τελικό κόμβο 6 έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα αφού δεν υπάρχουν άλλα μονοπάτια με θετική δυναμικότητα ροής. Η μέγιστη ροή για το απλό αυτό πρόβλημα υπολογίζεται **αθροίζοντας τις 2 ροές** που προέκυψαν, δηλαδή **7+8=15.** Επομένως, από τα 62 Mb δεδομένων που προέρχονται από την Πηγή (κόμβος 1) μεταφέρθηκαν τελικά τα 15. Να τονίσουμε σ’αυτό το σημείο πως είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικές τεχνικές για την εύρεση της μέγιστης ροής, ωστόσο το βέλτιστο αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι 15 Mb.

5.5 Παράδειγμα ΙΙ

,

Εστω ότι έχουμε ένα εργοστάσιο κατασκευής αυτοκινήτων. Γνωρίζοντας ότι οι διαδρομές από την κύρια μονάδα σχεδιασμού και παραγωγής δεν επιτρέπουν τη μεταφορά ολόκληρης της παραγόμενης ποσότητας στην κεντρική αντιπροσωπεία, επιδιώκουμε να ρυθμίσουμε την παραγωγική διαδικασία ανάλογα με τον μέγιστο αριθμό που καταλήγει στον προορισμό της ημερησίως.



Σχήμα 5.5a

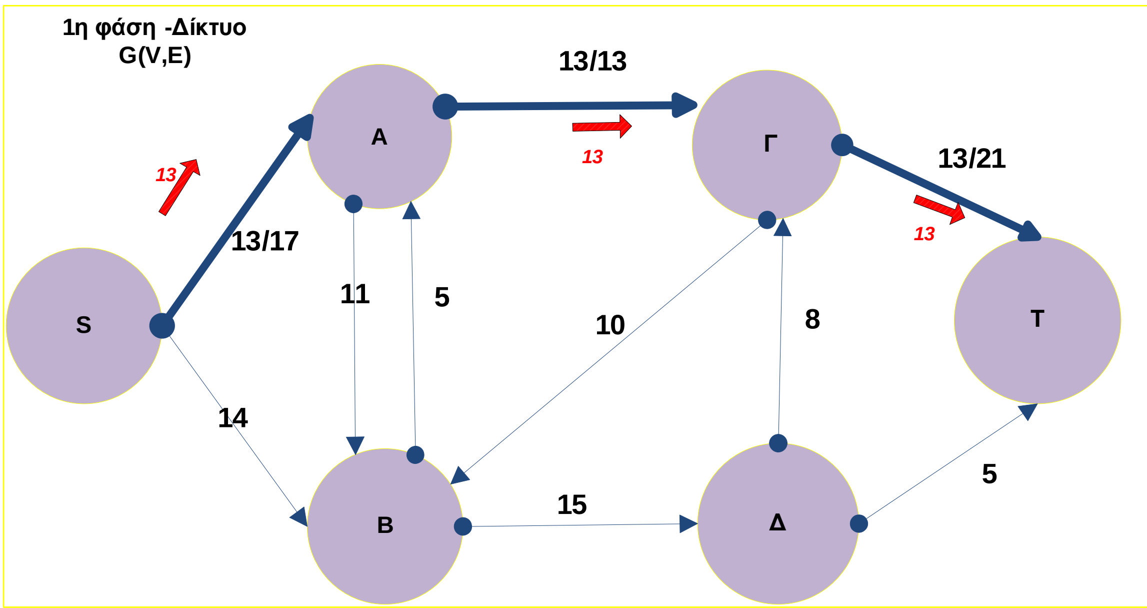
Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα δίκτυο 6 κόμβων που αναπαριστά το πρόβλημα μεταφοράς από το σημείο s στο τερματικό σημείο t όπου και γίνεται η διάθεση του προϊόντος. Οι κορυφές A, B, Γ και Δ είναι οι ενδιάμεσοι σταθμοί και συνδέονται μεταξύ τους μέσω ακμών. Οι κλάδοι φέρουν αριθμούς κατά μήκος του βέλους τους που αντιστοιχούν στον μέγιστο αριθμό αυτοκινήτων που είναι επιτρεπτό να μεταφερθεί για το αντίστοιχο ζεύγος κόμβων. Έτσι στον Α-κόμβο φθάνουν από την αφετηρία s το πολύ 17 αυτοκίνητα κ.ο.κ.

1^{o} Βήμα: Όπως έχουμε περιγράψει αναλυτικά και προηγουμένως βρίσκουμε ένα επαυξάνον μονοπάτι από το s στο t για το αρχικό δίκτυο G. Έστω ότι παίρνουμε τη διαδρομή p: $s \rightarrow A \rightarrow \Gamma \rightarrow t$ με $c_f(p) = \min\{c_f(u,v)\ \ όπου\ \ (u,v) \in p\} =$

$$= \min\{c_f(s,A), c_f(A,\Gamma), c_f(\Gamma,t)\} =$$

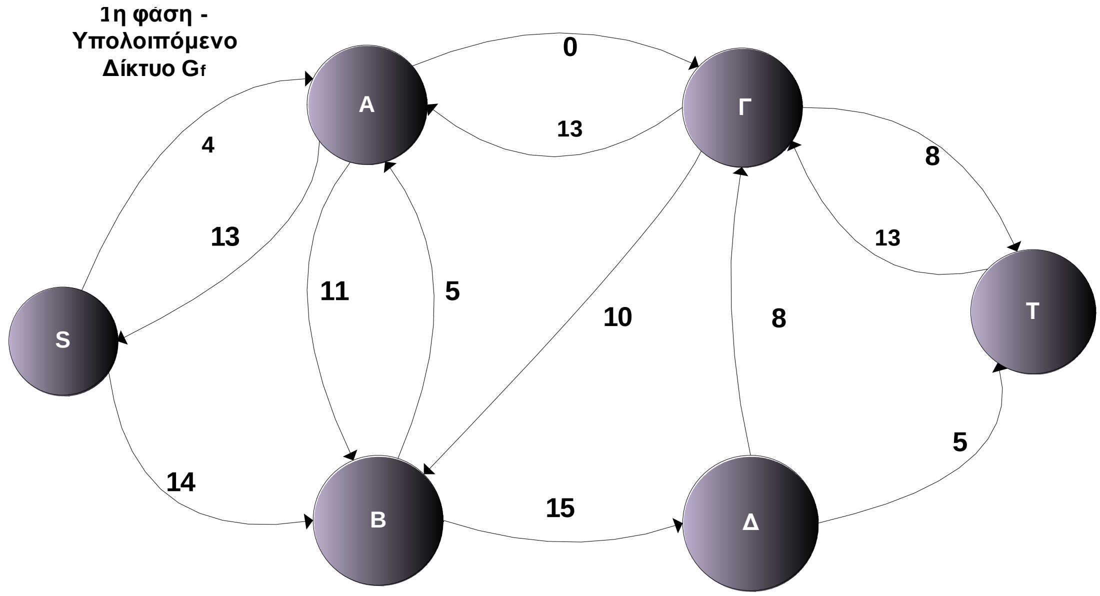
$$= \min\{17,13,21\} = 13 \quad (1)$$

Επομένως η προσωρινή μεταβλητή για το πρώτο βήμα επίλυσης **είναι** $\boldsymbol{c_f(p) = 13}$.



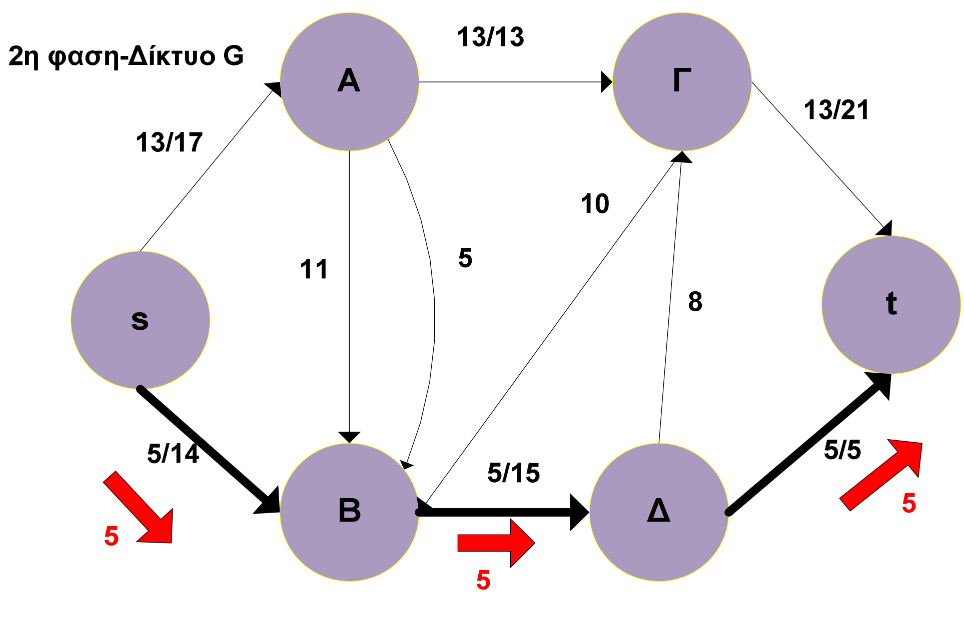
Σχήμα 5.5b

Το υπολοιπόμενο δίκτυο που προκύπτει μετά το πρώτο βήμα έχει την παρακάτω μορφή:



Σχήμα 5.5c

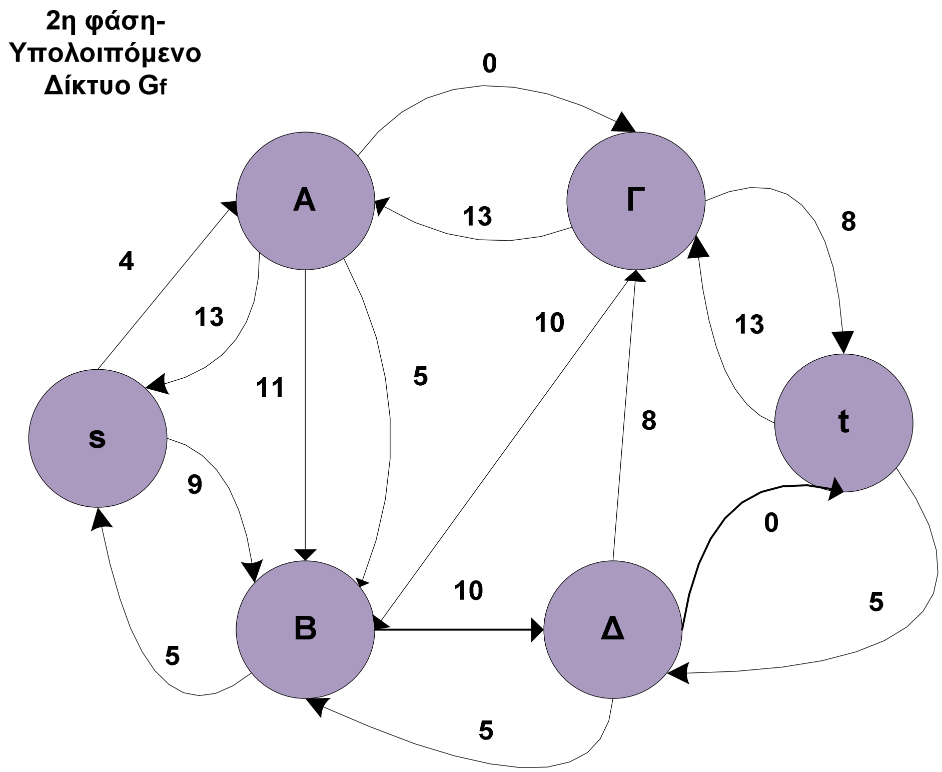
2ο Βήμα: Επειδή έχει εξαντληθεί η άμεση διαδρομή από τον κόμβο Α στον Γ, αναζητούμε άλλα μονοπάτια. Έστω ότι παίρνουμε αυτή τη φορά το επαυξάνον **μονοπάτι p_1:** $\boldsymbol{s \to B \to \Delta \to t}$ **με** $\boldsymbol{c_f(p_1) = 5}$ **(2)** αφού min {(s,B), (B,Δ), (Δ,t)}=5



Σχήμα 5.5d

Μέχρι τη $2^{η}$ φάση στον προορισμό t έχουν καταλήξει από τα συνολικά παραγόμενα προϊόντα, 13+5=18 μονάδες. Φυσικά, αμέσως διαπιστώνουμε ότι από το σημείο Δ δεν είναι δυνατό να μεταφερθούν με ένα βήμα στον t-κόμβο προϊόντα.

Ομοίως το υπολοιπόμενο δίκτυο μετά και τη μεταφορά ποσότητας 5 μονάδων είναι:



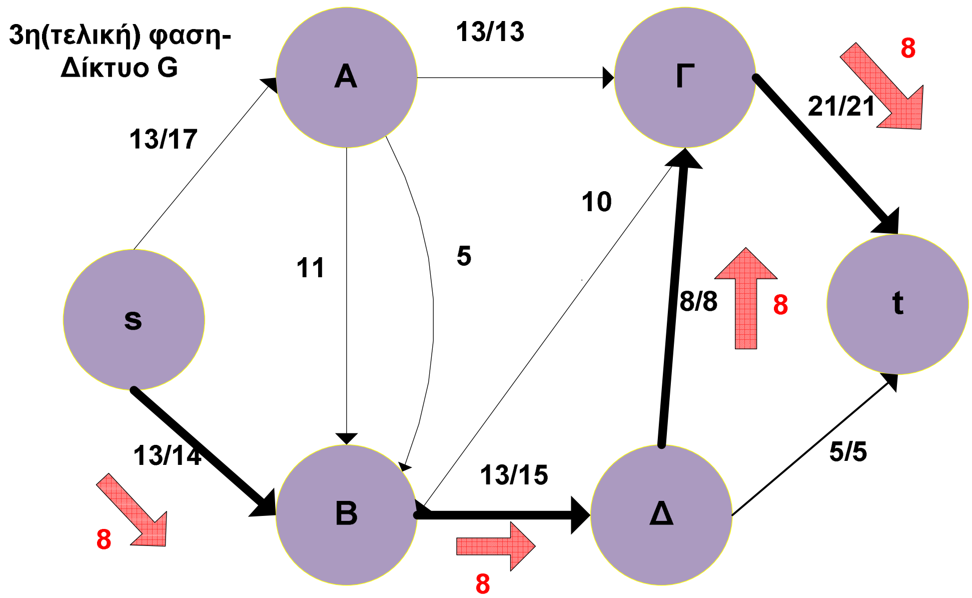
Σχήμα 5.5e

3^{ο} Βήμα: Το επόμενο επαυξάνον μονοπάτι για το γράφημά μας είναι το

$\boldsymbol{p_2 : s \to B \to \Delta \to \Gamma \to t}$ ***με*** υπολοιπόμενη χωρητικότητα ίση με

$$\boldsymbol{c_f(p_2) = \min\{c_f(s,B), c_f(B,\Delta), c_f(\Delta,\Gamma), c_f(\Gamma,t)\} = 8} \quad \textit{(3)}$$

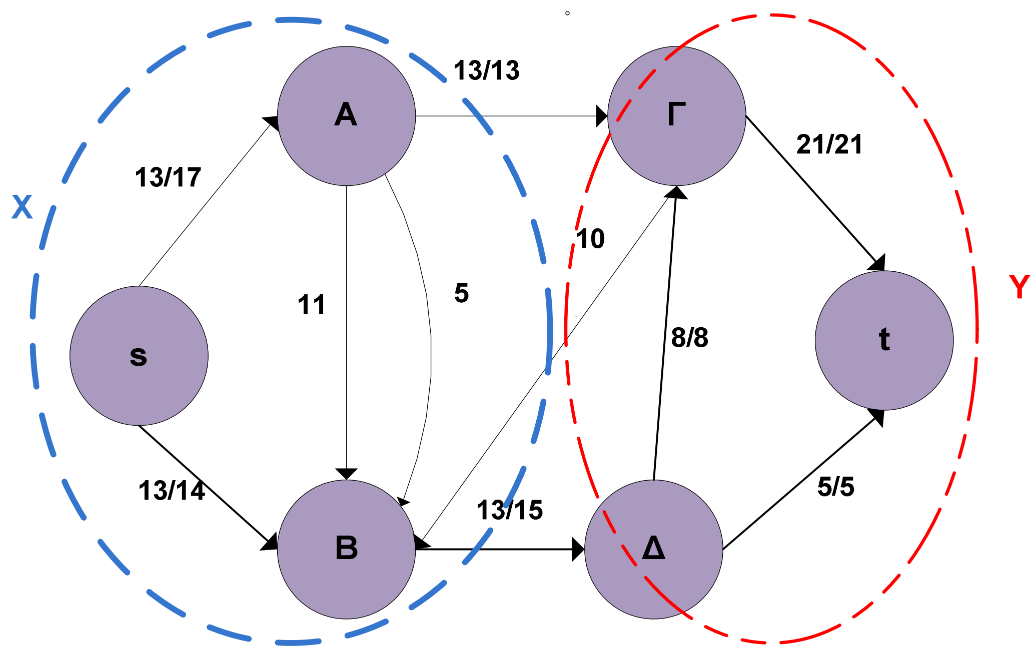
Η ανανεωμένη εικόνα του δικτύου είναι τώρα:



Σχήμα 5.5f

Σ'αυτό το σημείο κι επειδή οι δίοδοι στο t είτε από τον προηγούμενο κόμβο Γ είτε από τον κόμβο Δ (που αμφότεροι είναι γειτονικοί στο τέρμα t) έχουν εξαντλήσει τη δυνατότητα μεταφοράς μονάδων, το πρόβλημα έχει λυθεί. Δεν υπάρχει άλλο επαυξάνον μονοπάτι και συνεπώς η μέγιστη ροή που επιτρέπει το αρχικό δίκτυο να διέλθει από την πηγή s στον τερματισμό t είναι συνολικά : 13+5+8=26 μονάδες.

Με βάση το τελικό αποτέλεσμα (Σχ. 5.5f) και αν υποθέσουμε ότι **διαμερίζουμε** το σύνολο των κόμβων $V = \{s, A, B, \Gamma, \Delta, t\}$ στην **τομή (X,Y)**



Σχήμα 5.5g

Καθαρή ροή διαμέσου της τομής (X,Y) : $f(X,Y) = f(A,\Gamma) + f(B,\Gamma) + f(B,\Delta) =$

$= 13 + (-10) + 13 = 16$

ενώ η **χωρητικότητα της τομής (X,Y) :** $\boldsymbol{c(X,Y) = c(A,\Gamma) + c(B,\Delta) =}$

$$\boldsymbol{13 + 15 = 28}$$

Άρα $\boldsymbol{f(X,Y) \leq c(X,Y)}$.

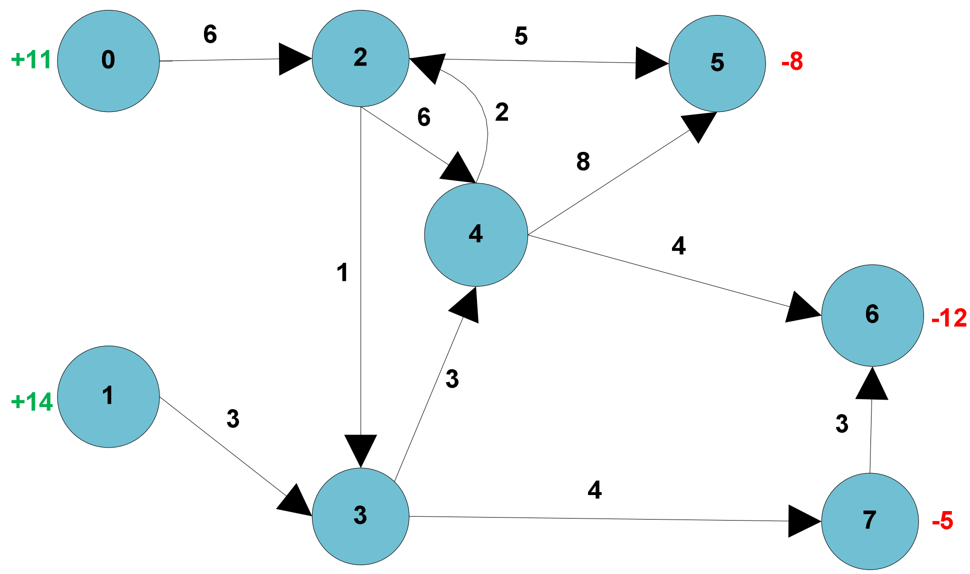
Η καθαρή ροή (net flow) [12] κατά μήκος της τομής μπορεί να περιέχει αρνητικές ροές μεταξύ κόμβων (όπως η ροή από τον B στον Γ) σε αντιδιαστολή με τη χωρητικότητα της τομής που περιλαμβάνει μόνο μη αρνητικές ποσότητες. Δηλαδή η καθαρή ροή της τομής *(X,Y)* αποτελείται από θετικές ροές και προς τις 2 κατευθύνσεις και η θετική ροή από το X στο Y **προστίθεται** ενώ η θετική ροή από το Y στο X **αφαιρείται.** Ακόμα, η χωρητικότητα της τομής (X,Y) υπολογίζεται μόνον από ακμές που οδηγούν από το X στο Y κι επομένως οι χωρητικότητες των ακμών από το Y στο X (αντίστροφα) δεν συνεκτιμώνται. Η ελάχιστη τομή (minimum cut) ενός δικτύου είναι η τομή της οποίας η χωρητικότητα *C(X',Y')* είναι η μικρότερη απ'όλες τις δυνατές τομές που υπάρχουν για το δίκτυο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πρόβλημα Ροής Ελάχιστου Κόστους (Minimum Cost Flow Problem)

6.1 Περιγραφή

Μια ακόμα ειδική περίπτωση προγραμματισμού δικτύων είναι και εκείνη στην οποία ζητούμε την ελαχιστοποίηση [13] μιας ποσότητας όταν συντρέχουν κάποιες προϋποθέσεις. Εδώ, έχουμε ένα προϊόν που ΄΄κυκλοφορεί΄΄ σ’ένα δίκτυο εγκαταστάσεων διατρέχοντας διάφορα σημεία.



Παράδειγμα-Σχήμα 6.1a

Το δίκτυο είναι **συνδεδεμένο** και **προσανατολισμένο** και υπάρχει **τουλάχιστον ένας κόμβος-πηγή** καθώς και **τουλάχιστον ένας κόμβος-προορισμός**. Οι υπόλοιποι κόμβοι που δέχονται και στέλνουν ποσότητες καλούνται **ενδιάμεσοι**.

Κάθε τέτοιο δίκτυο περιγράφεται από ένα ζεύγος *(V,E)* όπου V είναι το σύνολο των κόμβων που αποτελούν το δίκτυο κάθε φορά και E είναι το σύνολο των ακμών που συνδέουν προς συγκεκριμένη κατεύθυνση τους κόμβους. Με άλλα λόγια είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών *(i,j) με* $i,j \in V$.

Για κάθε ακμή *(i,j)* αντιστοιχεί μια τιμή κόστος $c_{i,j}$ που δηλώνει το κόστος ανά μονάδα της μεταφερόμενης ποσότητας από τον κόμβο i στον κόμβο j ενώ με $\boldsymbol{x_{i,j}}$ αναπαριστούμε την ποσότητα (ροή) που μετακινείται από τον i στον j κόμβο. Επιπλέον , κάθε κόμβος j χαρακτηρίζεται από μία ακόμα σημαντική ποσότητα,την b_j, με ιδιαίτερα γνωρίσματα. **Αν η ροή x(i,j) γίνεται στην κατεύθυνση i→j τότε x(i,j)≥0** ενώ στην αντίθετη περίπτωση **έχουμε x(i,j)≤0.**

Συγκεκριμένα αν:

- **b_j>0**, τότε έχουμε έναν **κόμβο-πηγή** που δέχεται μια (εισερχόμενη) ποσότητα b_j
- **b_j<0**,τότε ο κόμβος λέγεται **δέκτης ή σημείο ζήτησης και** πρέπει να μεταφερθεί ποσότητα $|b_j|$ και τέλος
- **b_j=0**, τότε ο j λέγεται **ενδιάμεσος κόμβος.**

Το $\mathbf{b_j}$ είναι το τελικό αποτέλεσμα που προκύπτει για κάθε κόμβο ή αλλιώς είναι η **καθαρή ροή** του. Η ροή σε κάθε κλάδο-ακμή είναι επιτρεπτή μόνο προς την κατεύθυνση που εμφανίζεται στο βέλος του δικτύου και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με τη χωρητικότητα της $u_{i,j}$.

Στο σχήμα του παραδείγματος οι κόμβοι 0 και 1 είναι οι πηγές του δικτύου με διαθέσιμες ποσότητες 11 και 14 αντίστοιχα ενώ οι κόμβοι 5, 6 και 7 αποτελούν τους προορισμούς με ζητούμενες ποσότητες 8 , 12 και 5 αντίστοιχα. Τέλος οι υπόλοιποι κόμβοι 2, 3 και 4 είναι οι ενδιάμεσοι. Ακόμη, οι αριθμοί στο γράφημα κατά μήκος των κατευθυνόμενων τόξων συμβολίζουν την χωρητικότητα της κάθε ακμής που μπορεί να μεταφερθεί σε κάθε συνδεδεμένο ζεύγος κορυφών.

Ο σκοπός του προβλήματος είναι να προσδιοριστεί το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς μιας ποσότητας διαμέσου ενός δικτύου με την προϋπόθεση της πλήρους κάλυψης της συνολικής ζήτησης.

6.2 Το μαθηματικό μοντέλο

Η διατύπωση του προβλήματος ελάχιστου κόστους με όρους μαθηματικών θα μπορούσε να είναι η εξής [13]:

Αν $\boldsymbol{f(x)}$ είναι το ολικό κόστος που προκύπτει για τη μεταφορά ενός διαθέσιμου προϊόντος σ’ένα δίκτυο τότε να βρεθεί ένα εφικτό πρόγραμμα μεταφόρτωσης που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος της διακίνησης του προϊόντος στο δίκτυο.

Αν G(V,A) το κατευθυνόμενο γράφημα, $\boldsymbol{u}$ **: A□R**$^{+}$ **η συνάρτηση χωρητικότητας** και

c: A□R^{+} **η συνάρτηση κόστους** τότε το κόστος ροής για f : A□R^{+} είναι :

$$\boldsymbol{minf(x)} = \sum_{\boldsymbol{(i,j)\in E}} \boldsymbol{c_{ij}\, x_{ij}} \qquad (*)$$

με c_{ij}:το κόστος από τον i στον j
και x_{ij}:την μεταφερόμενη ποσότητα από τον i στον j.

Με άλλα λόγια σκοπός του προβλήματος είναι η εύρεση για δοθέν κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E) και με πηγή s ∈ V και προορισμό t ∈ V της **μέγιστης ροής s □ t ώστε** η f να έχει το λιγότερο κόστος από οποιαδήποτε άλλη απ'όλα τα μονοπάτια **s □ t.**

Άρα για μονοπάτι **s □ t** μια ροή f με f ≤ r είναι η **ακραία (extreme) ροή [16]** αν η f έχει ελάχιστο κόστος ανάμεσα σ'όλες τις **s □ t ροές** g με g≤r και value(g)-value(f) δηλαδή για μέγιστη δυνατή μεταφερόμενη ποσότητα να πάρουμε το μονοπάτι με το μικρότερο κόστος. Συνεπώς, η ακραία ροή **είναι η ροή f με το μικρότερο** κόστος απ'όλες τις ροές ίδιας αξίας με την f.

Για να έχει εφικτές λύσεις η σχέση(*) πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες βασικές αρχές [17]:

- ✓ Η συνολική ροή που προέρχεται από τον κόμβο i είναι ίση με τη συνολική ροή που καταλήγει στον ίδιο κόμβο i. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την προηγούμενη συνθήκη ως εξής:
  Η διαφορά της **εξερχόμενης ποσότητας από την εισερχόμενη** για κάθε κόμβο i είναι ίση με την **ζητούμενη ποσότητα** του i-κόμβου και η διαφορά της **εισερχόμενης από την εξερχόμενη ποσότητα** είναι ίση με την ποσότητα που **προσφέρεται** στον κόμβο αυτό.

Η ολική ζήτηση στο δίκτυο **ισούται** με τη συνολική προσφορά.Επομένως για πλήθος κόμβων συνολικά ***m*** θα πρέπει να ισχύει :

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = 0 \,, \quad \text{όπου } m \text{ είναι το πλήθος των κόμβων στο } G(V,E)$$

Η συνολική παροχή (supply) στους κόμβους είναι 0 διότι :

$$\sum_{i \in V} b_i = \sum_{i \in V} \left\{ \sum_{(i,j) \in A} x_{i,j} - \sum_{(j,i) \in A} x_{j,i} \right\} = \sum_{i \in V} \sum_{(i,j) \in A} x_{i,j} - \sum_{i \in V} \sum_{(j,i) \in A} x_{j,i} = 0$$

Η παραπάνω υπόθεση δεν μας περιορίζει στις διάφορες εφαρμογές που καλούμαστε να λύσουμε. Ακόμα λαμβάνουμε την υπόθεση ότι οι χωρητικότητες u(i,j) είναι **πεπερασμένοι** αριθμοί.

Τα παραπάνω περιγράφονται συνοπτικά [16] με τη σχέση :

$$\sum_{(i,j)} x_{ij} - \sum_{(j,i)} x_{ji} = b_i \ \text{για κάθε κόμβο } i \qquad (1)$$

Φυσικά,για τις μεταφερόμενες ποσότητες x_{ij} ισχύει ο περιορισμός:

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \text{για } \forall \text{ κλάδο } i \rightarrow j \qquad (2)$$

Ένα τέτοιο δίκτυο που ισχύουν οι προϋποθέσεις (1) και (2) καλείται **εφικτό.**Επιπρόσθετα,οι περιορισμοί της σχέσης (1) ονομάζονται **εξισώσεις ισορροπίας της ροής [17]** και μέσω αυτών δηλώνεται ότι η ροή δεν παράγεται αλλά και δεν καταστρέφεται μέσα στο δίκτυο. Συνεπώς οι ποσότητες ροής $x_{i,j}$ που διακινούνται στο δίκτυο πρέπει να υπακούουν στους εξής περιορισμούς:

I. Η εισερχόμενη ποσότητα σε **κάθε σημείο ζήτησης** ελαττωμένη κατά την εξερχόμενη ποσότητα από το σημείο αυτό ισούται με τη ζητούμενη ποσότητα στο σημείο αυτό. Στο παράδειγμα μας αυτό σημαίνει οτι για τον *κόμβο προορισμού 7* έχουμε: **$x_{3,7} - x_{7,6} = -5$.** Όπου 5 είναι η ζήτηση του 7-κόμβου.

II. Η εξερχόμενη ποσότητα **από κάθε πηγή** ελαττωμένη κατά την εισερχόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό.

III. Η εισερχόμενη ποσότητα σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο ισούται με την εξερχόμενη ποσότητα στο σημείο αυτό.Δηλαδή για **κόμβο 4:**

$$x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5} + x_{4,6}$$

Στο παράδειγμά μας οι προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$\min f(x) = 6x_{02} + 3x_{13} + 1x_{23} + 6x_{24} + 5x_{25} + 3x_{34} + 4x_{37} + 2x_{42} + 8x_{45} + 4x_{46} + 3x_{76}$$

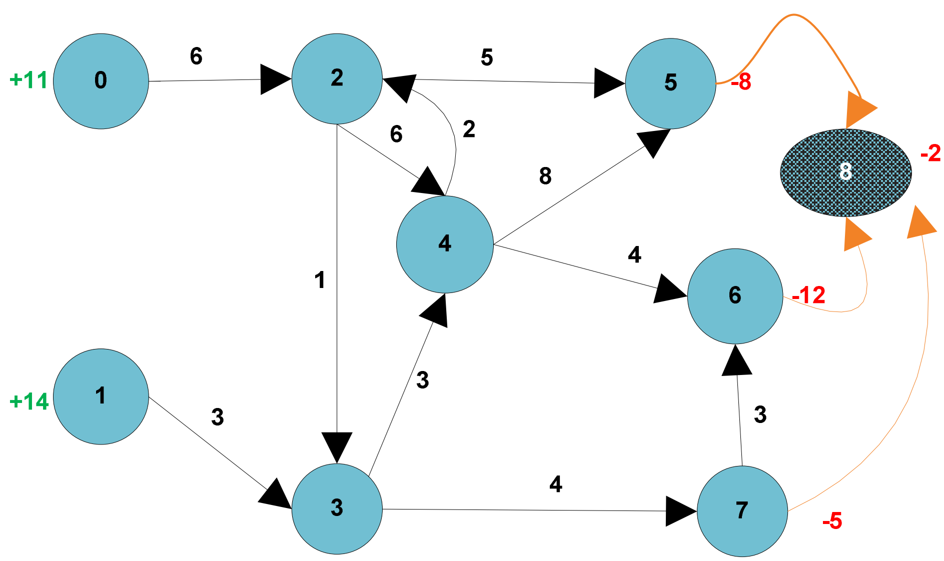
ύπο:

$$x_{02} = 11$$
$$x_{13} = 14$$
$$x_{02} - x_{23} - x_{24} - x_{25} + x_{42} = 0$$
$$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{37} = 0$$
$$x_{24} + x_{34} - x_{42} - x_{45} - x_{46} = 0$$
$$x_{25} + x_{45} = 8$$

$$x_{46} + x_{76} = 12$$
$$x_{37} - x_{76} = 5$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in E$$

Όπως προαναφέρθηκε η απαίτηση η προσφερόμενη ποσότητα να είναι ίση με τη συνολική ζήτηση δεν δημιουργεί σοβαρά προβλήματα αφού [17]:

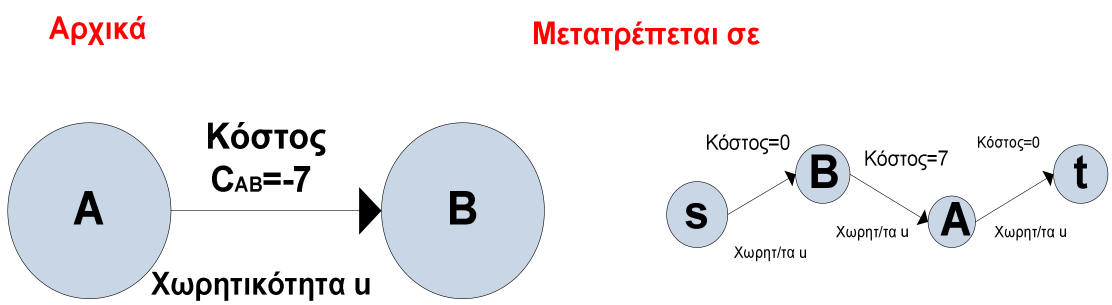
- Αν η προσφερόμενη ποσότητα είναι **μεγαλύτερη** από τη ζητούμενη τότε έχουμε $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b_j}$**>0** και επομένως προσθέτουμε έναν πλασματικό κόμβο ζήτησης [m+1] με ζητούμενη ποσότητα **-**$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b_j}$ και για κάθε κόμβο ζήτησης [i] εισάγουμε τόξο (i,m+1) με κόστος $c_{i,m+1}$ =0 επίσης πλάσματικό.
  Αν υποθέσουμε,επομένως,ότι ο κόμβος προορισμού 5 **είχε ζήτηση 6 (αντί για 9**) τότε η προσφερόμενη ποσότητα από τις πηγές 11+14=25 θα ήταν σαφώς **μεγαλύτερη από τη ζήτηση (6+12+5=23**) και γι'αυτό εισάγουμε έναν **πρόσθετο (εικονικό)** κόμβο **8 με** ζήτηση 25-23=2 και $c_{5,8}$=0, $c_{6,8}$=0 και $c_{7,8}$=0



Σχήμα 6.2a

- Ενώ αν η ζητούμενη ποσότητα υπερβαίνει την προσφερόμενη δηλαδή $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b_j}$**<0** τότε προσθέτουμε και πάλι έναν εικονικό κόμβο [m+1] με προσφερόμενη ποσότητα **-**$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b_j}$ και για κάθε κόμβο [i] προσθέτουμε τόξο (m+1,i) με $c_{m+1,i}$=0.

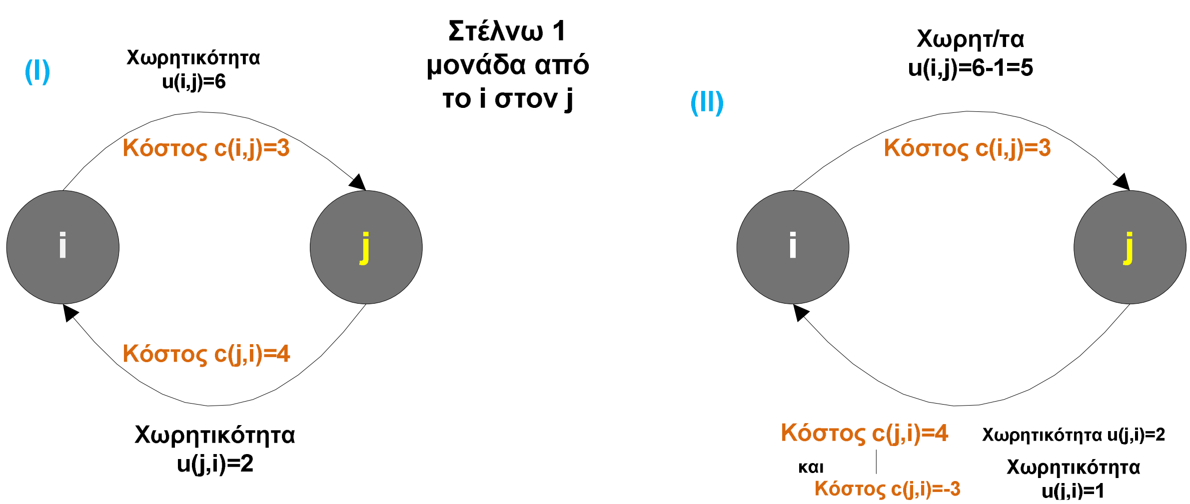
Στην ειδική περίπτωση που τα κόστη κατά μήκος των τόξων είναι **αρνητικά, τότε** μετατρέπουμε το αρχικό γράφημα σε άλλο ισοδύναμο με θετικά κόστη.



Σχήμα 6.2b

Αν υποθέσουμε ότι μεταφέρεται **ροή x(i,j)>0** (θετική ροή) από τον κόμβο i στον j τότε για τα **κόστη c(i,j) και c(j,i)** έχουμε : c(i,j)=c(i,j) και c(j,i)=-c(i,j).

Σχηματικά οι προηγούμενες σχέσεις εξηγούνται ως ακολούθως:



Σχήμα 6.2c

Υπολοιπόμενο Δίκτυο

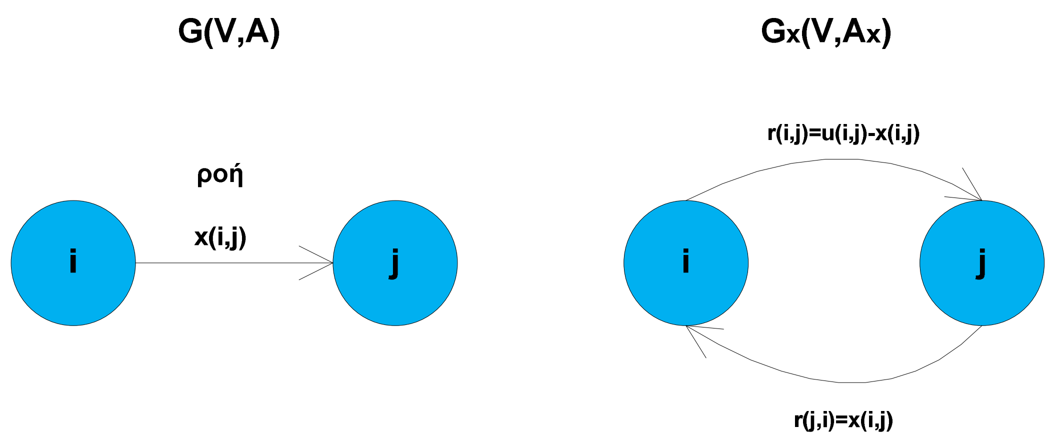
Για δεδομένη **ροή x** το αντίστοιχο υπολοιπόμενο δίκτυο G_x [17] ορίζεται ως εξής: $G_x(V,A_x)$ είναι το κατευθυνόμενο γράφημα με κόμβους, τους αρχικούς του δικτύου και τόξα **αμφίδρομης κατεύθυνσης** στο V. Ονομάζουμε **προς τα εμπρός (forward) [1]** τόξο **(i,j)** $\in A_x$ το τόξο (i,j) ∈A του αρχικού δικτύου για το οποίο η **υπολοιπόμενη χωρητικότητα** (residual capacity)

$\mathbf{r_{i,j}=u_{i,j}-x_{i,j}}$ **είναι θετική** με $\mathbf{u_{i,j}}$ αρχική χωρητικότητα της ακμής (i,j) και $\mathbf{x_{i,j}}$ την τρέχουσα ροή στο δίκτυο από τον i στον j. Σ'αυτήν την περίπτωση το κόστος c(i,j) ανά μονάδα ροής παραμένει ως έχει.

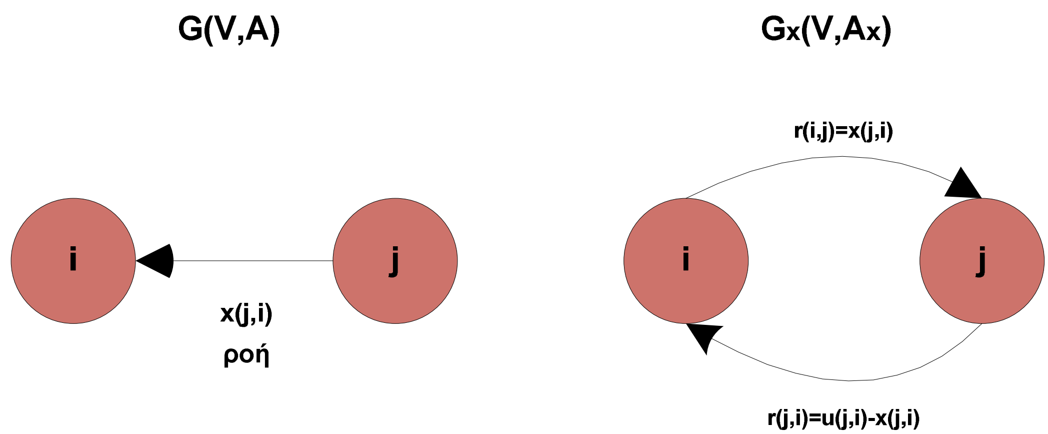
Αντιστοίχως, ονομάζεται **προς τα πίσω (backward),** το **τόξο** (j,i) $\in A_x$ που προκύπτει από το αρχικό τόξο (i,j) για το οποίο η υπολοιπόμενη χωρητικότητα

$\mathbf{r_{j,i}=x_{i,j}}$ **είναι θετική.**

Το κόστος του **προς τα εμπρός** τόξου είναι $\mathbf{c_{i,j}}$ **ενώ** του προς τα πίσω **(j,i) είναι** $\mathbf{-c_{i,j}}$.



Σχήμα 6.2d



Σχήμα 6.2e

Υποθέτουμε ότι για κάθε ζεύγος (i,j) ∊ A και εφικτή ροή x, τότε ένα μονοπάτι i□j υπάρχει στο G_x. Αν χρειαστεί προσθέτουμε τόξα απεριόριστης χωρητικότητας και με υπέρογκα κόστη στο υπολοιπόμενο δίκτυο G_x.

Προσθέτοντας T μονάδες από το i στο j ουσιαστικά σημαίνει **μείωση** της υπολοιπόμενης χωρητικότητας του τόξου (i,j) σε

$$\mathbf{u(i,j)-x(i,j)-T}$$

και συγχρόνως αύξηση της υπολοιπόμενης χωρητικότητας του **αντίστροφου τόξου σε**

$$\mathbf{x(i,j)+T}.$$

Το **κόστος** αυτής της αύξησης είναι **cT**.

Ομοίως αν προστεθούν T μονάδες της ροής στο τόξο (j,i) τότε μειώνεται η υπολοιπόμενη χωρητικότητα του (j,i) σε

$$\mathbf{x(i,j)-T}$$

και ελαττώνεται και το κόστος κατά cT.

Ψευδοροή

Η έννοια της ψευδοροής (pseudoflow) [7] έχει ιδιαίτερη σημασία στις εφαρμογές και ορίζεται ως η συνάρτηση x που αναφέρεται σε εκείνα τα τόξα που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{0 \leq x_{i,j} \leq u_{i,j}}$$

δηλαδή της μη αρνητικότητας των ροών και του άνω φράγματος από τις χωρητικότητες του εκάστοτε τόξου αλλά ενδεχομένως παραβιάζουν τους περιορισμούς διατήρησης της ροής όπως καθορίστηκαν από σχέση (1). Προφανώς, μια εφικτή (feasible) ροή είναι ψευδοροή. Στην περίπτωση της ψευδοροής x, ένας κόμβος j είναι πιθανό να φέρει μια ποσότητα μη παραδοθείσα ή μια ανεκπλήρωτη απαίτηση που λέγεται **πλεόνασμα (excess**) ή **έλλειμμα (deficit)** του κόμβου αντίστοιχα.

Το πλεόνασμα/έλλειμμα e_i [7] του κόμβου j για μια δεδομένη ψευδοροή x ορίζεται :

$$\boldsymbol{e_i = b_{ji} + \sum_{j:\,(j,i)\in A} x_{j,i} - \sum_{j:\,(i,j)\in A} x_{i,j}}$$

- Αν $e_i>0$ □ ο i-κόμβος θεωρείται πλεονασματικός (με πλεόνασμα e_i) και
- αν $e_i<0$ □ ο i-κόμβος θεωρείται ελλειμματικός (με έλλειμμα e_i)

Το συνολικό πλεόνασμα ισούται με το συνολικό έλλειμμα για κάθε κόμβο.

Αλγόριθμος[8]

Αν ο στόχος ροής για προορισμό είναι r , δηλαδή αν η παραγόμενη ποσότητα των πηγών είναι r, τότε:

1. Ξεκίνα με ροή f όπου *f(u,v)=0* $\forall u,v \in V$
2. Βρες το συντομότερο μονοπάτι p στο υπολοιπόμενο δίκτυο G_f από πηγή s στον προορισμό t
3. Αν q είναι η ελάχιστη υπολοιπόμενη χωρητικότητα των ακμών στο p, στείλε *min(q, r-value(f))* επιπλέον μονάδες κατά μήκος του μονοπατιού p
4. Επανάλαβε διαδικασία μέχρι *value(f)=r*

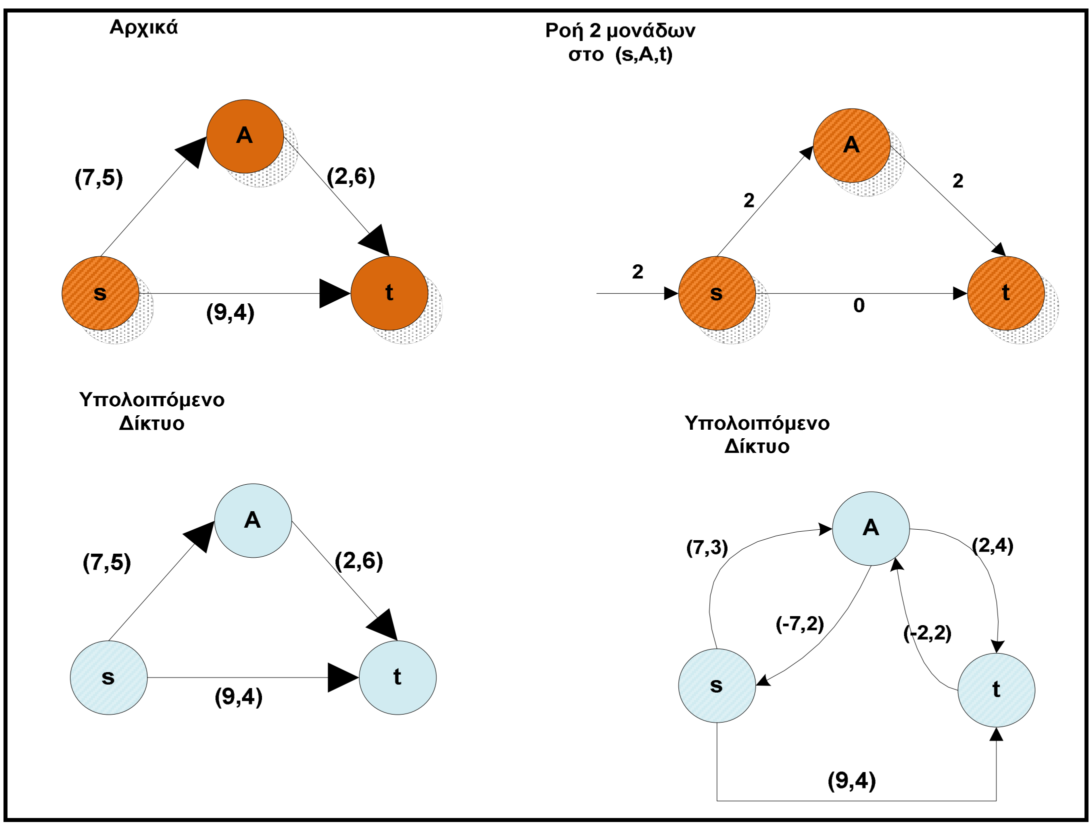
6.3 Υπαρξη Κύκλων στο Γράφημα

Ερμηνεία Κύκλου

Θυμίζουμε ότι κύκλος σ'ένα δίκτυο υπάρχει όταν σ'ένα μονοπάτι του γραφήματος G(V,E) η αρχή και το πέρας του ταυτίζονται (δηλαδή s=t). Έστω ότι ένας κόμβος i ανήκει σε κύκλο. Αν θεωρήσουμε ότι στέλνουμε x μονάδες ροής στον κύκλο από κόμβο i πίσω στον κόμβο i τότε επί της ουσίας βρίσκουμε ένα εναλλακτικό μονοπάτι αποστολής ροής στον i-κόμβο. Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απόλυτα περιγραφικό της προηγούμενης κατάστασης :

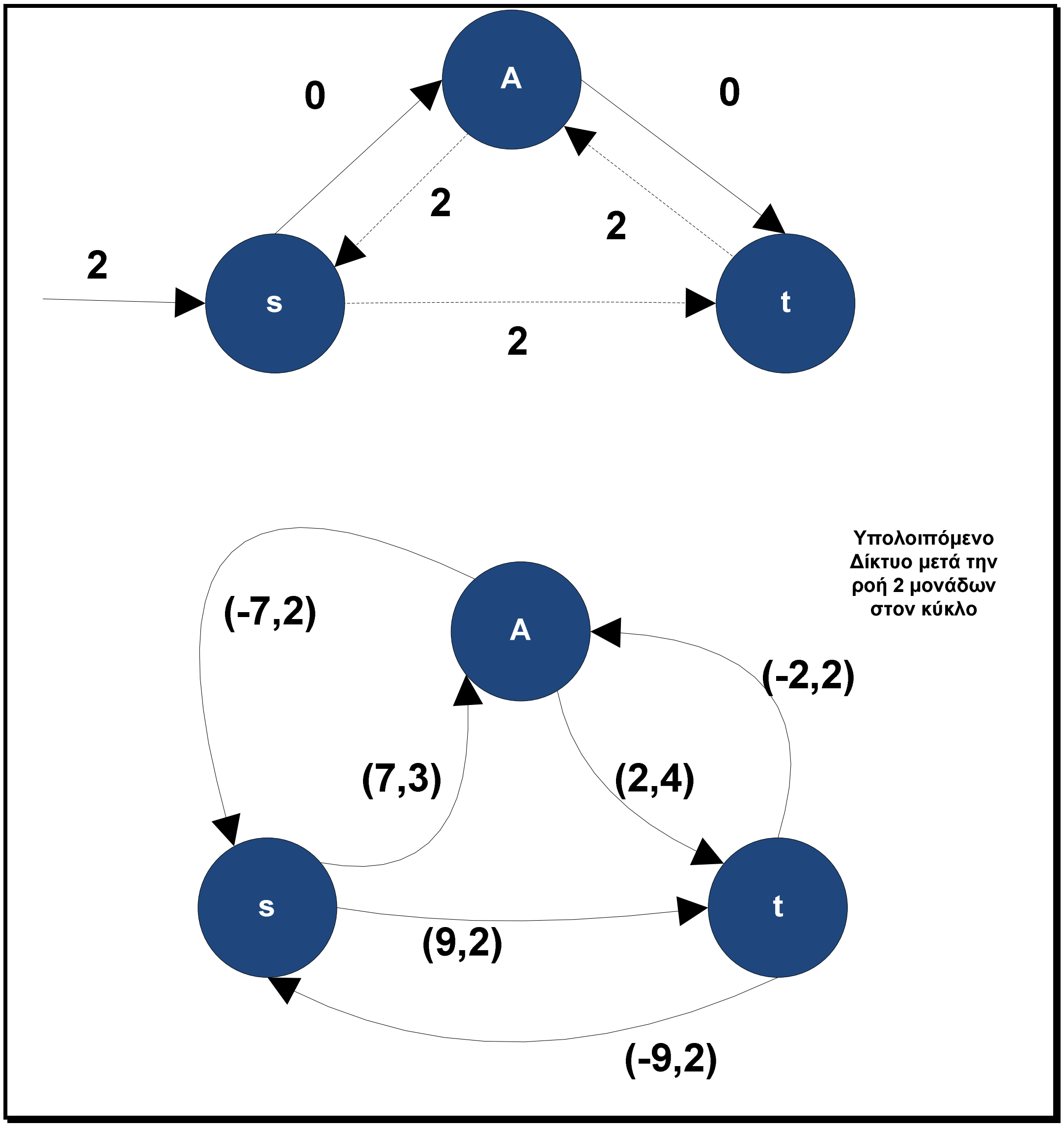
Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα δίκτυο *G(V,E)* τριών κόμβων s (πηγή), A (ενδιάμεσος κόμβος) και t (προορισμός) που συνδέονται μεταξύ τους με συγκεκριμένες ακμές. Τα ζεύγη τιμών (c_{ij}, u_{ij}) πάνω στα τόξα αναπαριστούν το κόστος και τη χωρητικότητα αντίστοιχα της κάθε ακμής.

Μεταφέρουμε 2 μονάδες στο μονοπάτι s□A□t (κι όχι στον κύκλο)



Σχήμα 6.3a

Αν,τώρα,μεταφερθούν **2 μονάδες στον κύκλο s→t→A→s** έχουμε:



Σχήμα 6.3b

Αρνητικός λέγεται ο **κύκλος [13] που** το συνολικό κόστος καθώς διατρέχουμε τις ακμές του είναι (συνολικά) αρνητικός αριθμός.

Συνθήκες Ιδανικής Λύσης

- **Θεώρημα Ιδανικής Συνθήκης σε Αρνητικό Κύκλο** (negative cycle optimality conditions) [11]:
  Η εφικτή λύση x του προβλήματος ελάχιστου κόστους είναι η **ιδανική** αν και μόνον αν το υπολοιπόμενο δίκτυο G_x δεν περιλαμβάνει κύκλο με συνολικό κόστος αρνητικό.

Το θεώρημα αυτό είναι άμεση συνέπεια του εύλογου συμπεράσματος ότι κάθε εφικτή ροή μπορεί να χωρισθεί σε πεπερασμένο σύνολο επαυξανόντων μονοπατιών και κύκλων.

- **Θεώρημα 2**:
  Η ροή x έχει ελάχιστα κόστη κατά μήκος των ακμών της αν και μόνον αν το υπολοιπόμενο δίκτυο G_x δεν έχει αρνητικούς κύκλους.

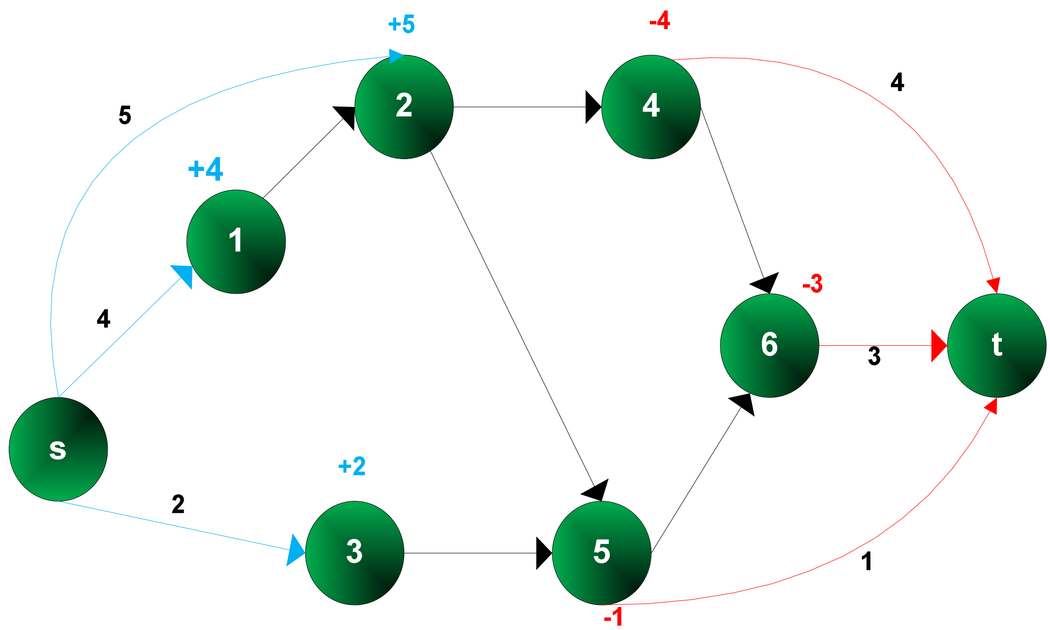
Αν το G_x έχει τουλάχιστον έναν αρνητικό κύκλο, τότε είναι δυνατό να βελτιώσουμε τη ροή x σε μια ‘’καλύτερη’’ με μικρότερο κόστος.

Αλγόριθμος Ακύρωσης Κύκλου (Cycle Cancelling Algorithm)

- Δώσε μια εφικτή ροή *f* στο δίκτυο
- Όσο το υπολοιπόμενο δίκτυο G_f έχει αρνητικό κύκλο,τότε
  -βρες έναν αρνητικό κύκλο C στο G_f
  -αν T μονάδες είναι η ελάχιστη υπολοιπόμενη χωρητικότητα των ακμών στο C,πρόσθεσε T μονάδες ροής για κάθε ακμή στο C . Αυτή είναι η νέα εφικτή ροή με το μικρότερο κόστος.
- Βγάλε το f.

Εύρεση Εφικτής Λύσης [17]

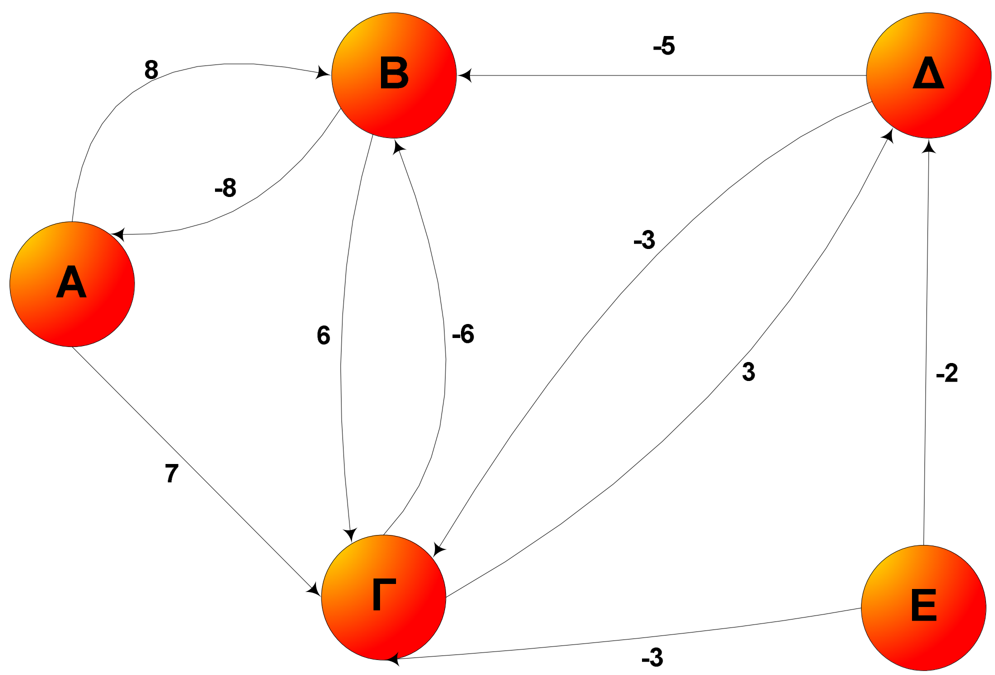
- Αν *b(j)* για κάποιον κόμβο j στο δίκτυο είναι θετική, *b(j)>0* , τότε φτιάχνουμε ένα επιπρόσθετο τόξο (s,j) όπου s η πηγή του δικτύου με χωρητικότητα *u(s,j)=b(j).*
- Αν *b(j)<0* τότε φτιάχνουμε τόξο (j,t) όπου t ο κόμβος τερματισμού με χωρητικότητα *u(j,t)=-b(j).*



Σχήμα 6.3c

Κύκλοι Αρνητικού Κόστους

Τέτοιοι αρνητικοί κύκλοι στο γράφημα είναι: Α□Γ□Β□1 με συνολικό αρνητικό κόστος 7+(-6)+(-8)=-7 ή ο κύκλος Γ□Ε□Δ□Γ με αντίστοιχο κόστος 3+(-2)+(-3)=-2



Σχήμα 6.3d

Επίλυση Προβλημάτων Ελάχιστου Κόστους Με Μέθοδο Simplex

Έχουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G(V,E) [17] όπου κάθε ακμή $e \in R^{+}$ και για κάθε μεταφερόμενη μονάδα αντιστοιχεί κόστος $c_e \in R$. Κάθε κορυφή v ∈ V παράγει ή απαιτεί μια ποσότητα b_v. Το πρόβλημα ελάχιστου κόστους αντιμετωπίζεται με την επίλυση του δϋικού του. Οι **δϋικές μεταβλητές** που αντιστοιχούν στους περιορισμούς ροής του **πρωτεύοντος (primal)** προβλήματος συμβολίζονται με w_v για κάθε κόμβο v ∈ V με αντίστοιχη χωρητικότητα z(v,u) για κάθε (v,u) ∈ E.

Αν υποθέσουμε ότι το πρωτεύον πρόβλημα έχει την εξής μορφή:

$$\min c^T x$$

$$Ax = b \ \mu\varepsilon \ x \geq 0$$

$$\kappa\alpha\iota \ \ A \ o \ \pi\acute{\iota}\nu\alpha\kappa\alpha\varsigma \ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\omega}\nu \ \tau\omega\nu \ \tau\acute{o}\xi\omega\nu \ \tau o\upsilon \ G(V,E)$$

τότε το αντίστοιχό του δϋικό (dual) πρόβλημα διατυπώνεται ως ακολούθως:

$$max \sum_i b_i w_i$$

$$\mu\varepsilon \ w_i - w_j \leq c_{ij} \quad \forall \ (i,j) \in A.$$

Με $\overline{c(u,v)} = c(u,v) + \ w_u - w_v$ ονομάζουμε το **μειωμένο κόστος (reduced cost)** για το τόξο (u,v) κι έτσι :

$$-c(u,v) - w_u + w_v \leq z(u,v) \text{ που είναι ισοδύναμη με:}$$

$$-\overline{c(u,v)} \leq z(u,v)$$

Μένει το ερώτημα: Πότε οι εφικτές λύσεις x (για το πρωτεύον) και w (για το δϋικό) είναι οι βέλτιστες (optimal);

- Αν $u_e = +\infty$ (δηλαδή η χωρητικότητα της ακμής e είναι απεριόριστη) τότε

$$z_e = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \overline{c_e} \geq 0$$

- Αν $u_e \neq +\infty$ τότε $z_e \geq 0 \ \kappa\alpha\iota \ z_e \geq -\overline{c_e}$

Το z έχει αρνητικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση κι επομένως η καλύτερη επιλογή γι'αυτό είναι όσο το δυνατό η μικρότερη, δηλαδή

$$z_e = \max\{0, -\overline{c_e}\}.$$

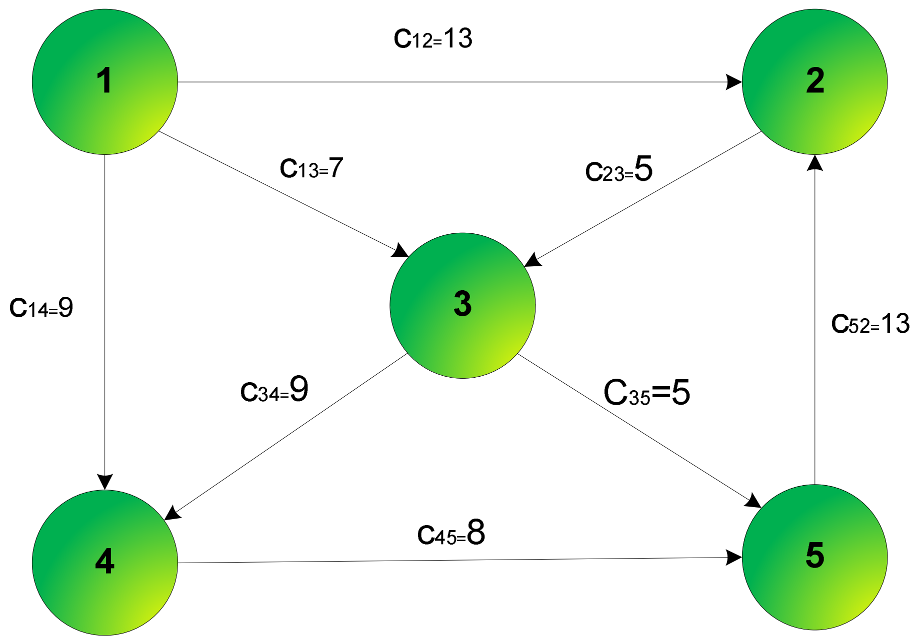
Μια εφικτή λύση x για το πρωτεύον πρόβλημα είναι η ιδανική αν και μόνον αν μπορούμε να βρούμε μια δϋική λύση w(u,v) ∀ (u,v) ∊ A έτσι ώστε να ισχύει :

$$\overline{c(\iota,\jmath)} < 0 \ \Rightarrow \ x(i,j) = u(i,j) \ \ \kappa\alpha\iota$$

$$\overline{c(\iota,\jmath)} > 0 \ \Rightarrow \ x(i,j) = 0$$

Περιορισμοί:

- ✓ Το δϋικό πρόβλημα έχει τόσες (δϋικές) μεταβλητές όσες και το πλήθος των περιορισμών του πρωτεύοντος προβλήματος.
- ✓ Το δϋικό πρόβλημα έχει τόσους περιορισμούς όσες είναι και οι μεταβλητές του πρωτέυοντος.
- ✓ Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δϋικού είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος.
- ✓ Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δϋικού προβλήματος είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος.
- ✓ Αν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης τότε το δϋικό είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης και αντιστρόφως.



Σχήμα 6.3e

Δϋικό Θεώρημα: Αν υπάρχει βέλτιστη λύση για το πρωτεύον πρόβλημα τότε υπάρχει βέλτιστη λύση για το δϋικό του.

Ιδιότητα Συμπληρωματικότητας: Αν μια μεταβλητή είναι βασική στο πρωτεύον τότε η αντίστοιχή της μεταβλητή στο δϋικό είναι μη βασική.

Είδαμε και στα προηγούμενα ότι μια λύση είναι εφικτή αν συντρέχουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- σε κάθε εσωτερικό κόμβο (transit) η συνολική ροή που εισέρχεται είναι ίση με τη συνολική ροή που εξέρχεται απ'αυτόν,
- για **κάθε πηγή** η συνολική εξερχόμενη ροή ισούται με το άθροισμα της παροχής του κόμβου αυτού με τη συνολική εισερχόμενη ροή σ'αυτόν.
- για κάθε κόμβο προορισμού (sink) η συνολική εισερχόμενη ροή ισούται με το άθροισμα της απαίτησης του κόμβου αυτού με τη συνολική εξερχόμενη ροή απ'αυτόν.
- Όλες οι ροές στα τόξα είναι μη αρνητικές ποσότητες

Αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο A των ακμών του δικτύου [16] διαμερίζεται σε δύο σύνολα:
$το\ B\ που\ περιλαμβάνει\ τις\ ακμές\ του\ δένδρου\ κάλυψης\ (spanning\ tree)$ και $το\ R\ που\ περιλαμβάνει\ τις\ υπόλοιπες\ ακμές\ του\ G(V, E)$. Ένα υποσύνολο των κόμβων του γραφήματος αποτελεί **βάση** αν και μόνον αν οι ακμές που τους συνδέουν σχηματίζουν ένα δένδρο κάλυψης (ζευγνύον δένδρο). Ένα τέτοιο δένδρο έχει **n κορυφές και n-1 τόξα χωρίς να προκύπτει κύκλος.**

Αν το τόξο (i,j) είναι **βασικό** τότε πρέπει : $\boldsymbol{w_i - w_j = c_{ij}\ \ για} \ \forall\ (\boldsymbol{i, j}) \in \boldsymbol{B} \quad (\boldsymbol{a})$
όπου w_i η δϋική μεταβλητή για κορυφή i. Μια μεταβλητή από τις δϋικές μπορεί να ληφθεί ως 0 και $\boldsymbol{w_i - w_j \leq c_{ij}} \quad \forall(\boldsymbol{i, j}) \in \boldsymbol{R} \qquad (\boldsymbol{\beta})$

Συνεπώς αν για δοθείσα βασική εφικτή λύση x ικανοποιούνται συγχρόνως και οι περιορισμοί (α) και (β) τότε έχουμε ιδανική λύση για το πρόβλημα. Αν δεν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί τότε δεν έχουμε βέλτιστη λύση και πρέπει να την αναζητήσουμε. Στην περίπτωση αυτή **υπάρχει τόξο (i,j) ∈ R** : $w_i - w_j > c_{ij}$
και τότε το μειωμένο κόστος της μεταβλητής x_{ij} είναι :

$$\boldsymbol{\overline{c_{ij}} = c_{ij} - w_i + w_j < 0}$$

Και γι'αυτό χρειάζεται να *εντάξω* τη **μεταβλητή** $\boldsymbol{x_{ij}}$ στην *βάση* κι επομένως *ενεργοποιείται* το τόξο *(i,j).* Μετά την προσθήκη και του τόξου (i,j) μαζί με τα άλλα τόξα του *B* σχηματίζεται κύκλος.

Αν ***Q*** είναι το σύνολο των τόξων του κύκλου. Επειδή πρέπει να τηρηθεί η απαραίτητη προϋπόθεση του μη κύκλου στο δένδρο κάλυψης τότε διαγράφουμε κάποιο από τα τόξα του Q. Με ποιο τρόπο επιλέγεται το τόξο που θα εγκαταλείψει τη βάση;

Αφού $\overline{c(\iota, \jmath)} < 0$ είναι προτιμότερο να αυξηθεί η ροή στο (i,j) τόξο. Άρα στα τόξα του Q **αυξάνουμε τη ροή σ'εκείνα που έχουν την ίδια** κατεύθυνση με το (i,j) και αναλόγως μειώνουμε τη ροή στα υπόλοιπα που έχουν αντίθετη κατεύθυνση με το (i,j). Αν τύχει όλα τα τόξα του Q να έχουν ίδια κατεύθυνση με το (i,j), τότε αυξάνουμε τη ροή σε όλα τα τόξα του Q και μ'αυτόν τον τρόπο μειώνεται τελικά η αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι στον κατευθυνόμενο κύκλο Q **το άθροισμα κόστους των τόξων είναι αρνητικό.**

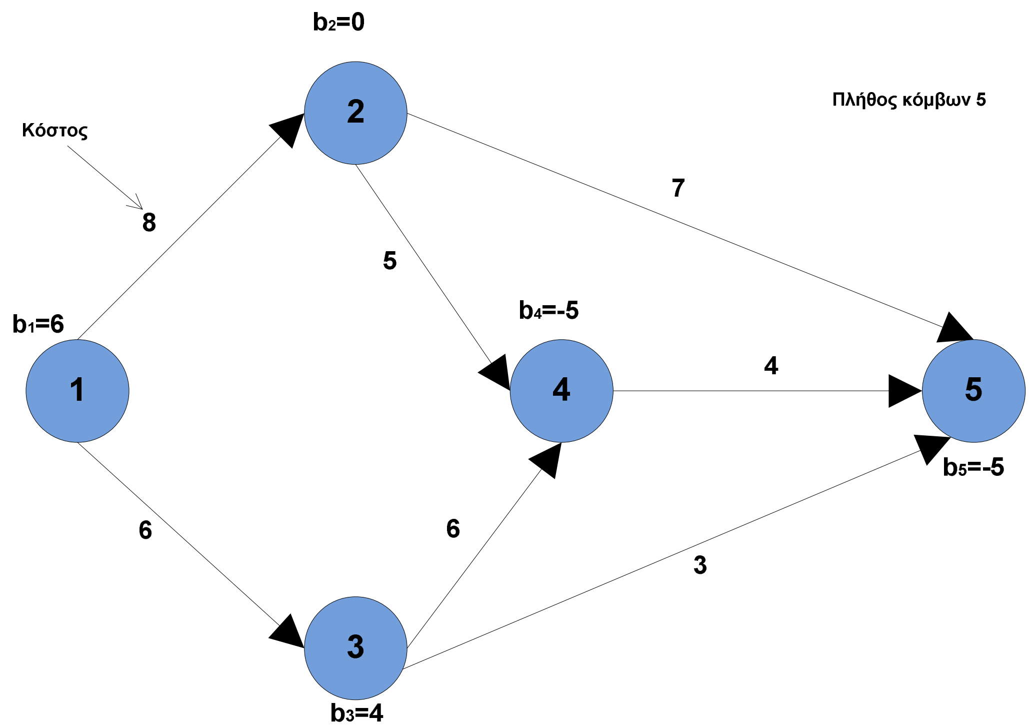
Αν δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, υπάρχει μια τουλάχιστον ακμή **(u,v) με κατεύθυνση αντίθετη** από το (i,j) και καθώς η ροή στο (i,j) αυξάνεται, η δική του στο (u,v) θα μηδενιστεί κι η (u,v) φεύγει από τη βάση. ***Η μέγιστη εφικτή τιμή ϑ*** για τη ροή (i,j) υπολογίζεται ως εξής :

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{min}\ \{\boldsymbol{x_{\lambda\kappa}} : (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\kappa}) \in \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\mu\varepsilon}\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\kappa})\ \boldsymbol{\alpha\nu\tau}\text{ί}\boldsymbol{\theta\varepsilon\tau\eta\varsigma}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\tau\varepsilon}\text{ύ}\boldsymbol{\theta\upsilon\nu\sigma\eta\varsigma}\ \boldsymbol{\alpha\pi o}\ \boldsymbol{\tau o}\ (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\}$$

Κατά συνέπεια αυξάνουμε τη ροή κατά ***ϑ*** στα τόξα ίδιας κατεύθυνσης με το (i,j) και μειώνουμε κατά ***ϑ*** τη ροή για τα τόξα αντίθετης κατεύθυνσης με το (i,j).

6.4 Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε ένα δίκτυο υδροδοτήσεως που απεικονίζεται στο γράφημα και περιγράφει τη ροή του νερού διαμέσου αγωγών με συγκεκριμένα έξοδα για τη μεταφορά του που για τεχνικούς λόγους θεωρούμε ότι έχουν απεριόριστη χωρητικότητα.



Σχήμα 6.4a

Οι τιμές πάνω στις ακμές αντιστοιχούν στα κόστη κι επειδή οι κόμβοι 1 και 3 έχουν θετική ποσότητα b_i είναι οι πηγές του γραφήματος ενώ οι κόμβοι 4 και 5 είναι οι προορισμοί με απαίτηση 5 και 5 αντίστοιχα. Ο κόμβος 2 είναι εσωτερικός κόμβος μηδενικής απαίτησης ή μηδενικής παροχής (0-supply/requirement). Επιπλέον, επειδή η συνολική παροχή είναι ίση με τη συνολική ανάγκη δηλαδή $b_1+b_3=b_4+b_5=10$ έχουμε ένα ισορροπημένο πρόβλημα. Καλούμαστε να βρούμε την ποσότητα που πρέπει να μεταφέρουμε στο δίκτυο ώστε να επιτύχουμε το ελάχιστο κόστος.

Άρα $\quad minimize \ \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} \quad με\ x_{ij}$: η ροή από τον i στον j

και c_{ij}: $το\ κόστος\ της\ ροής\ για\ πορεία\ απο\ i\ στον\ j$

Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι :

$$x_{12}+x_{13}=6=b_1$$

$$-x_{12}+x_{24}+x_{25}=0=b_2$$

$$-x_{13}+x_{34}+x_{35}=4=b_3$$

$$-x_{24}+x_{34}-x_{45}=-5=b_4$$

$$-x_{25}-x_{35}-x_{45}=-5=b_5$$

Πρόκειται για ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όπου το πλήθος των περιορισμών είναι όσο και το πλήθος των κόμβων και έχουμε τόσες μεταβλητές x_{ij} όσες και το πλήθος των ακμών στο δίκτυο. Για το λόγο αυτό εισάγουμε τις δϋικές (dual) μεταβλητές w_1, w_2, w_3, w_4 και w_5 και το δϋικό πρόβλημα έχει ως αντικειμενική συνάρτηση την

$$\max\sum_{j\in V} w_j b_j = w_1b_1+w_2b_2+w_3b_3+w_4b_4+w_5b_5$$

Να τονίσουμε εδώ ότι κάθε x_{ij} εμφανίζεται τόσο στον i-περιορισμό όσο και

στον j-περιορισμό με συντελεστή +1 και συντελεστή -1 αντίστοιχα(ο x_{13} υπάρχει και στον 1^{ο} με συντελεστή +1 και στον 3^{ο} περιορισμό με συντελεστή -1).

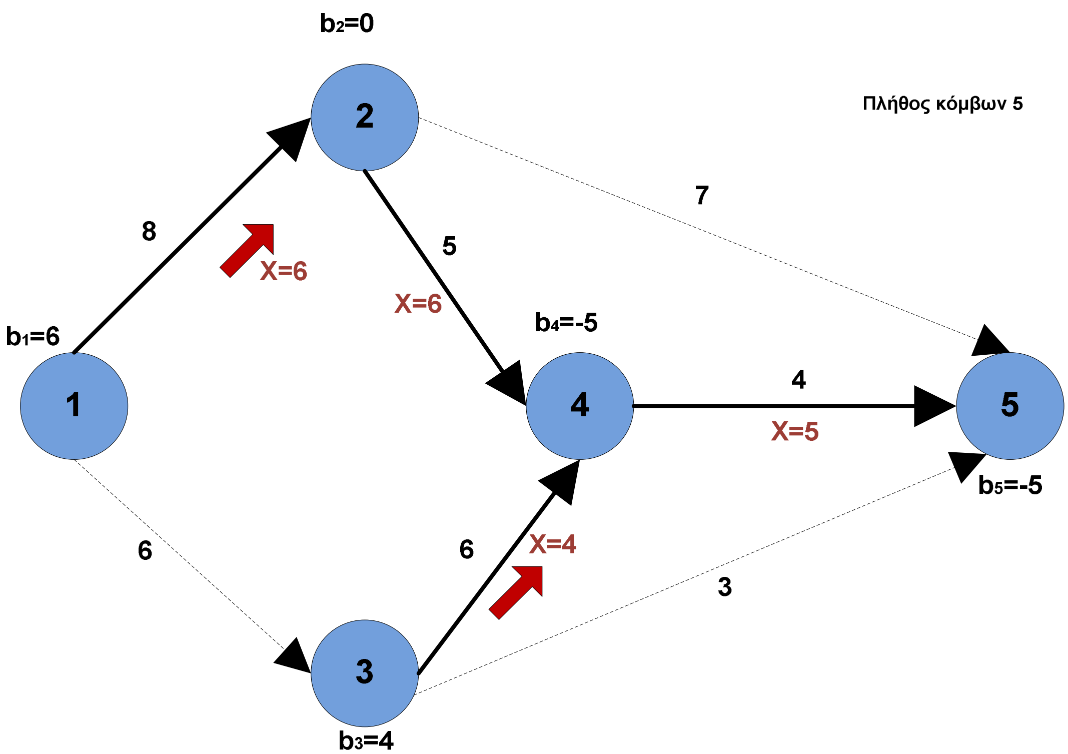
Για τις δϋικές μεταβλητές w_j ισχύουν οι περιορισμοί που υπαγορεύονται από τα κόστη:

$\boldsymbol{w_i - w_j \le c_{ij}}$ **(1)** και w_j απεριόριστες (επειδή οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος είναι εξισώσεις). Οι περιορισμοί για τις δϋικές μεταβλητές μοιάζουν με εκείνες στο πρόβλημα μεταφοράς.

$$\sum_{i=1}^{5} b_i = 0\ (εξίσωση\ ισορροπίας)$$

Ως πρώτο βήμα βρίσκουμε μια εφικτή λύση. Επειδή το πρόβλημα είναι ισορροπημένο (balanced - η ζήτηση ισούται με την παραγωγή), τότε βάζουμε μια τυχαία τιμή σε μια από τις δϋικές μεταβλητές w_j. Συνήθως επιλέγουμε την τιμή 0 για λόγους ευκολίας. Ας υποθέσουμε ότι ''τρέχει'' μια ροή x=6 μονάδων από 1□2,

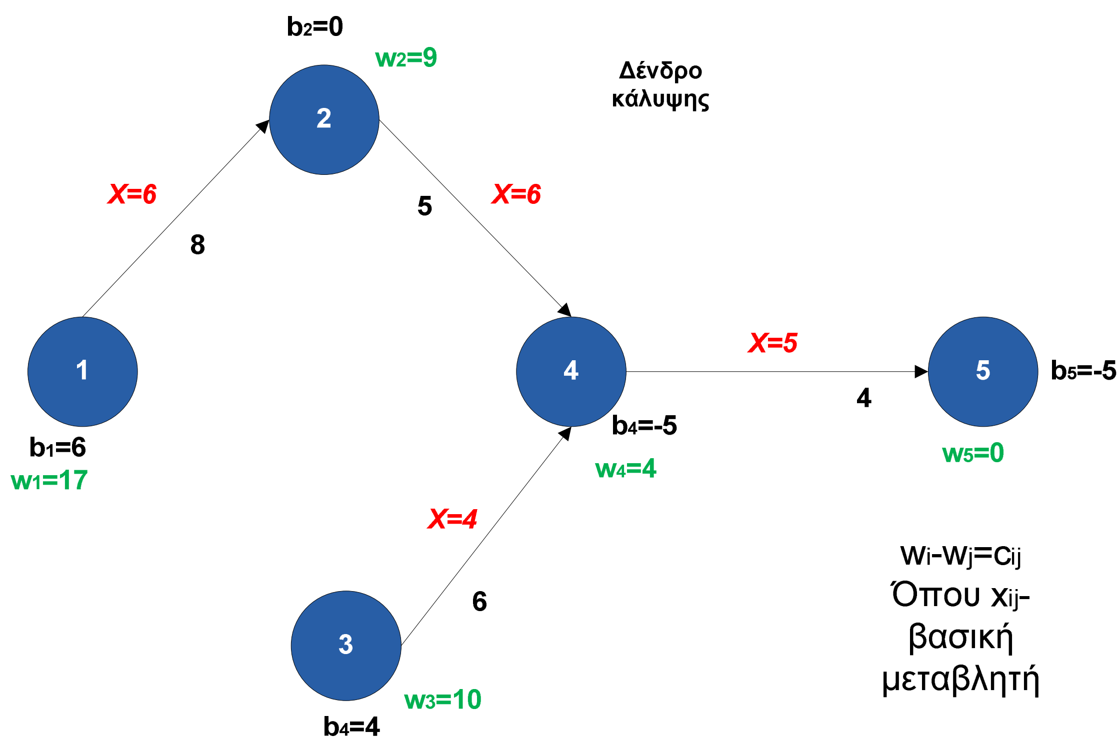
x=6 από 2□4 , x=4 από 3□4 και x=4 από 4□5. Δηλαδή μεταφέρουμε 6 μονάδες από κόμβο 1 στον κόμβο 2, μετά 6 μονάδες από τον 2 στον 4 και από τον κόμβο-πηγή 3 μεταφέρουμε και τις 4 μονάδες που αυτός παράγει στον κόμβο 4. Έτσι στον κόμβο προορισμού 4 φθάνουν συνολικά 6+4=10 μονάδες. Ο κόμβος 4 καταναλώνει τις 5 που χρείαζεται (όπως δηλώνει το b_4=-5) και οι υπόλοιπες 5 που απέμειναν (από τις 10) καταλήγουν στον επόμενο κόμβο-προορισμού 5 για να ''κορεστεί'' η ανάγκη του.



Σχήμα 6.4b

Το σχετιζόμενο με την παραπάνω ροή κόστος είναι: 48+30+24+20=**122** (πολλαπλασιάζοντας τα κόστη των ακμών με την αντίστοιχη ροή και αθροίζοντας τις επιμέρους ποσότητες). Ελέγχουμε, τώρα, αν η παραπάνω εφικτή ροή είναι και η ιδανική λύση. Σχεδιάζουμε το δίκτυο που προέκυψε από την προηγούμενη ροή ή αλλιώς ένα ζευγνύον δένδρο.

Οι 4 ακμές του παραπάνω δένδρου παριστάνουν τις βασικές μεταβλητές για την εφικτή λύση που επιλέξαμε πριν. Κι εδώ βλέπουμε ότι για δίκτυο 5 κόμβων, η εφικτή λύση περιέχει 5-1=4 ακμές. Ανάλογα κάτι παρόμοιο συναντήσαμε και στα προβλήματα μεταφοράς. Στη συνέχεια καθορίζουμε τις δϋικές μεταβλητές βάζοντας τυχαία στην δϋική w_5 την τιμή 0.



Σχήμα 6.4c

Οι υπόλοιπες δϋικές μεταβλητές υπολογίζονται με τη βοήθεια της σχέσης w_i-w_j=c_{ij} ειδικά για την περίπτωση που οι x_{ij} είναι βασικές μεταβλητές. Έτσι έχουμε:

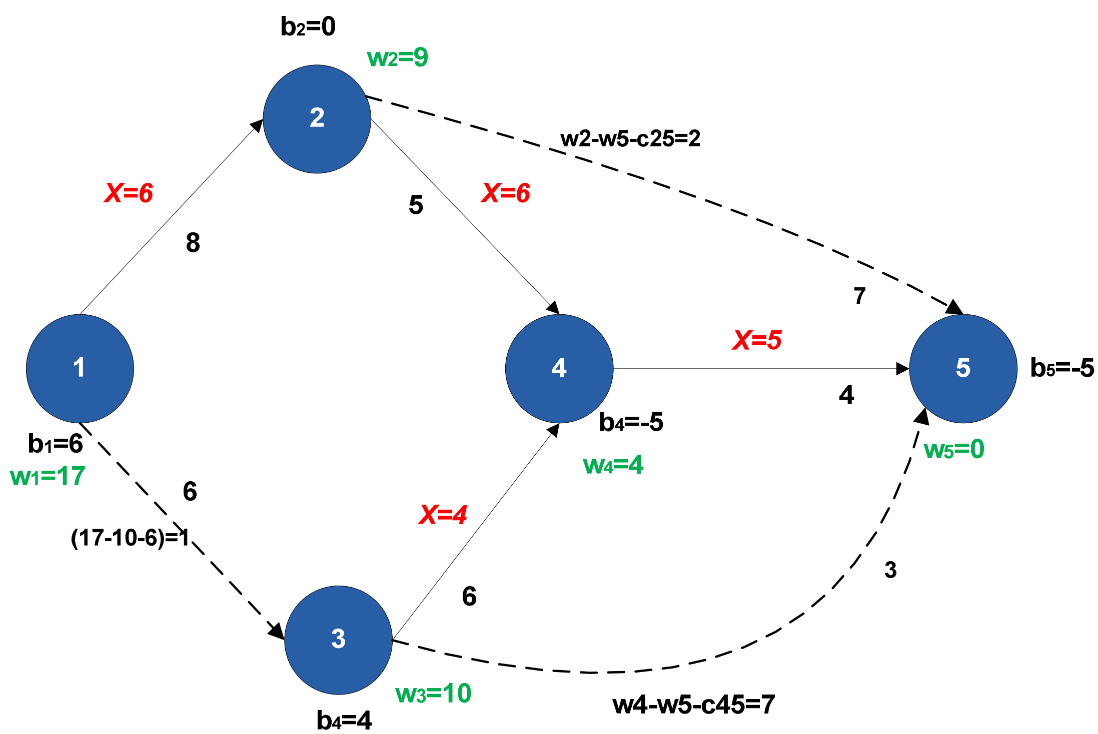
w_4-w_5=c_{45} ↔ w_4-0=4 ↔ **w_4=4 αφού** η x_{45} είναι βασική μεταβλητή. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τις άλλες δϋικές μεταβλητές του δϋικού προβλήματος. Στη συνέχεια επιστρέφουμε στο αρχικό δίκτυο και εξετάζουμε αν η συνθήκη-περιορισμός (1) του δϋικού προβλήματος ικανοποιείται **και για τις μη βασικές** μεταβλητές-ακμές του δικτύου.

Για τη μη βασική 1□3 ακμή έχουμε : **w_1-w_3-c_{13} = 17-10-6 = 1>0**

Για τη δεύτερη μη βασική ακμή 2→5 : **w_2-w_5-c_{25} = 9-0-7 = 2>0 και** **(A)**

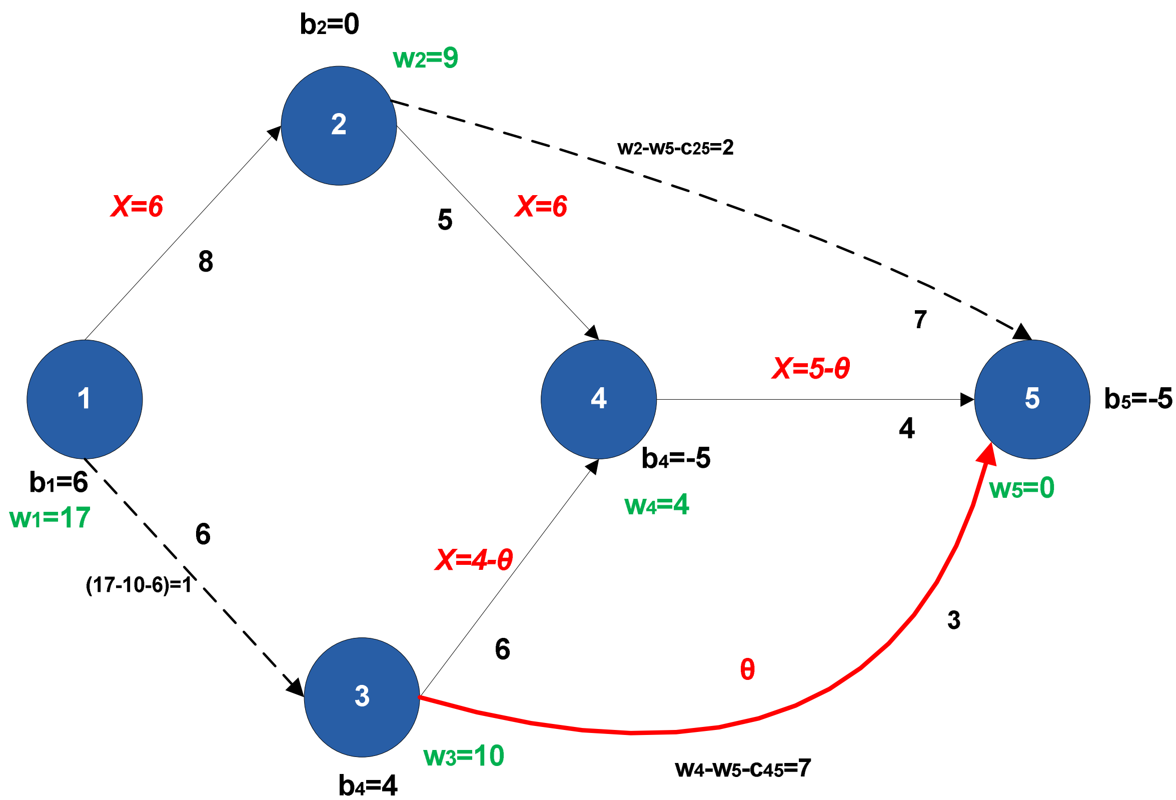
για την τελευταία μη βασική ακμή 3□5: **w_3-w_5-c_{35} = 10-0-3 =7>0.**

Από τα συνολικά 7 τόξα που συνιστούν το γράφημά μας τα 4 είναι βασικά και τα άλλα 3 όχι. Η 4-άδα **(w_1,w_2,w_3,w_4) δεν** είναι εφικτή δϋική λύση για το πρόβλημα διότι για τις μη βασικές ακμές παραβιάζεται η συνθήκη (1).



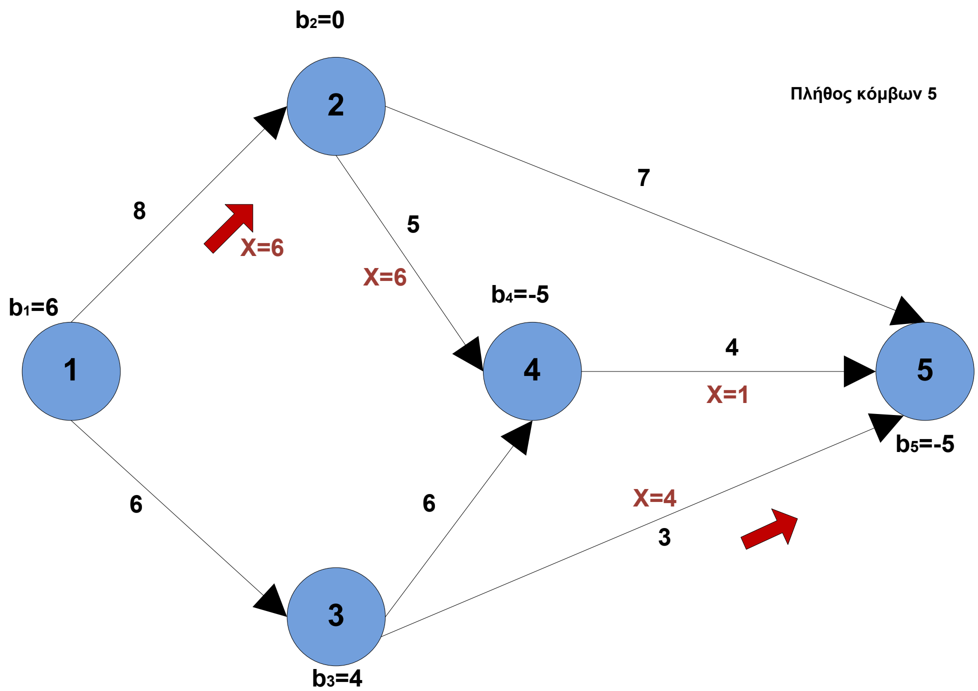
Σχήμα 6.4d

Στην προκειμένη περίπτωση από τις μη βασικές ακμές επιλέγουμε εκείνη που έχει τη μεγαλύτερη τιμή από τις σχέσεις (A) δηλαδή την x_{35} με τιμή 7 και την εισάγουμε στις βασικές ακμές. Προσθέτουμε, λοιπόν, την ακμή 3→5 και τη συμβολίζουμε με την παράμετρο θ. Εφ'όσον ''φεύγει'' ροή θ από τον κόμβο 3 που παράγει συνολικά 4 μονάδες τότε από τον κόμβο 3 στον κόμβο 4 φεύγει ροή 4-θ (από 4 που ήταν προηγουμένως) και συγχρόνως από τον κόμβο 4 στον κόμβο 5 καταλήγει ροή 5-θ (από 5 που ήταν προηγουμένως). Η νέα ροή θ από τον 3 στον 5 απεικονίζεται έτσι:



Σχήμα 6.4e

Επειδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το θ είναι όση και η παραγόμενη ποσότητα του κόμβου 3, δηλαδή 4 τότε για θ=4 έχουμε:



Σχήμα 6.4f

Άρα από τον κόμβο 2 φεύγουν x=6 μονάδες κι επειδή ο κόμβος 4 έχει απαιτήσεις 5 μονάδων καταναλώνει τις 5 από τις 6 και μένει 1 μονάδα που φεύγει από κόμβο 4 για τον κόμβο 5. Μετά από κόμβο 3 φέυγουν 4 μονάδες (όσο και το θ) που καταναλώνονται από τον προορισμό 5 που έχει απαιτήσεις 5 μονάδων που ικανοποιούνται πλήρως (4+1=5).

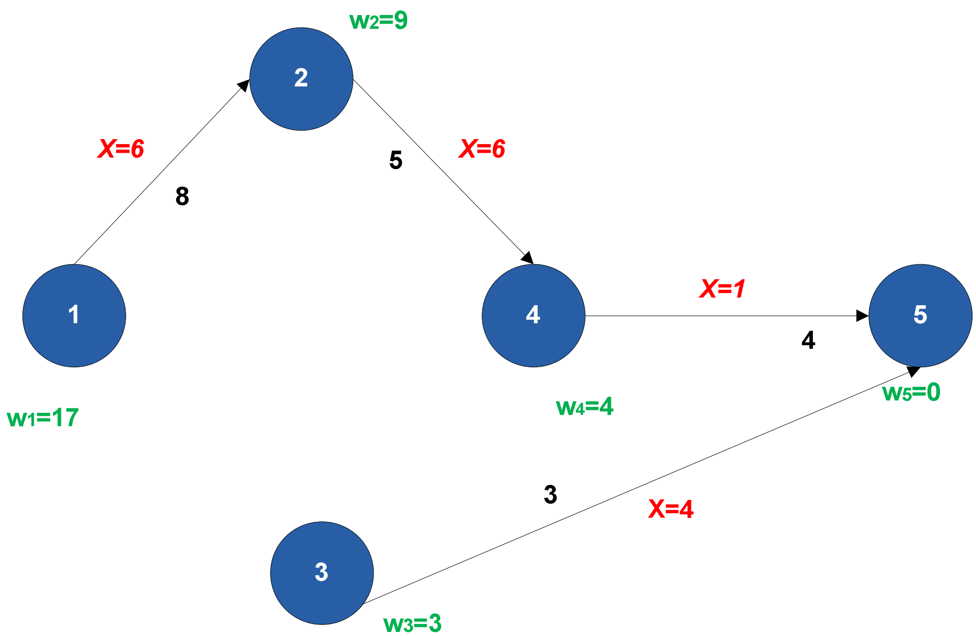
Το κόστος για τη ροή που δημιούργησε το θ είναι:

48+30+4+12=94

Κατά συνέπεια συντελέστηκε μείωση του κόστους κατά 122-94=28 μονάδες που οφείλεται στο εξής γεγονός:

Η ροή θ προήλθε από τη **νέα** βασική ακμή x_{35} για την οποιά η συνθήκη ισορροπίας έδωσε w_3-w_5-c_{35}=7 που πολλαπλασιαζόμενο με το 4=θ δίνει το 28 όση και η μείωση.

Ελέγχουμε, τώρα, κατά τα συνήθη αν η λύση αυτή είναι η ιδανική. Επαναϋπολογίζουμε τις δϋικές τιμές των w. Ξαναθέτουμε w_5=0 κι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε αναλυτικά πιο πριν.



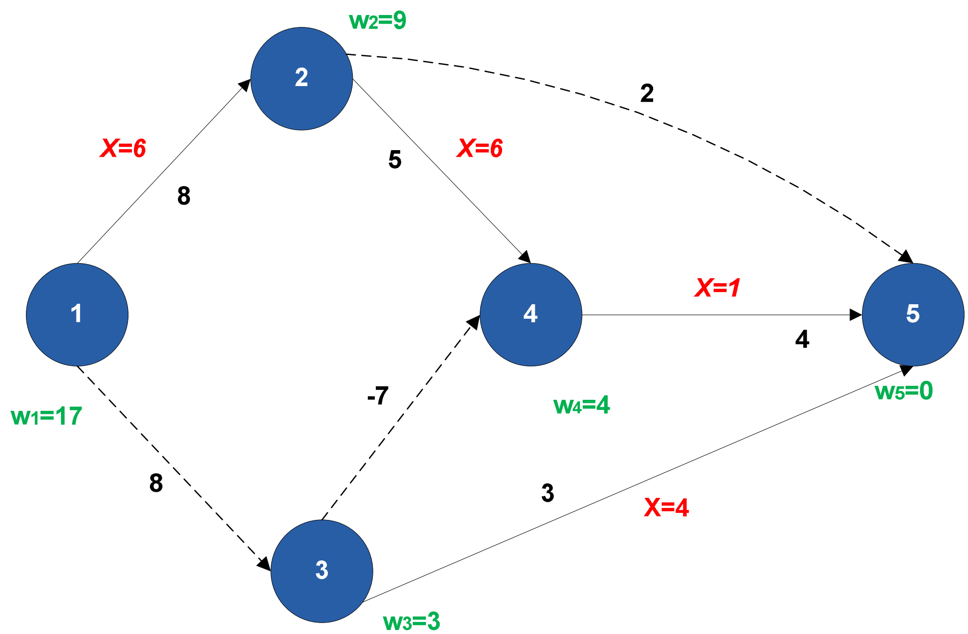
Σχήμα 6.4g

Οι νέες τιμές των δϋικών μεταβλητών φαίνονται στο σχήμα. Επιστρέφουμε στο αρχικό δίκτυο και πάλι για να εξακριβώσουμε αν ισχύουν οι συνθήκες (1) για τις μη βασικές μεταβλητές και για να αποφανθούμε αν η λύση μας είναι η ιδανική.

Για τη μη βασική ακμή 1□3: $\mathbf{w_1 - w_3 - c_{13} = 17 - 3 - 6 = 8 > 0}$

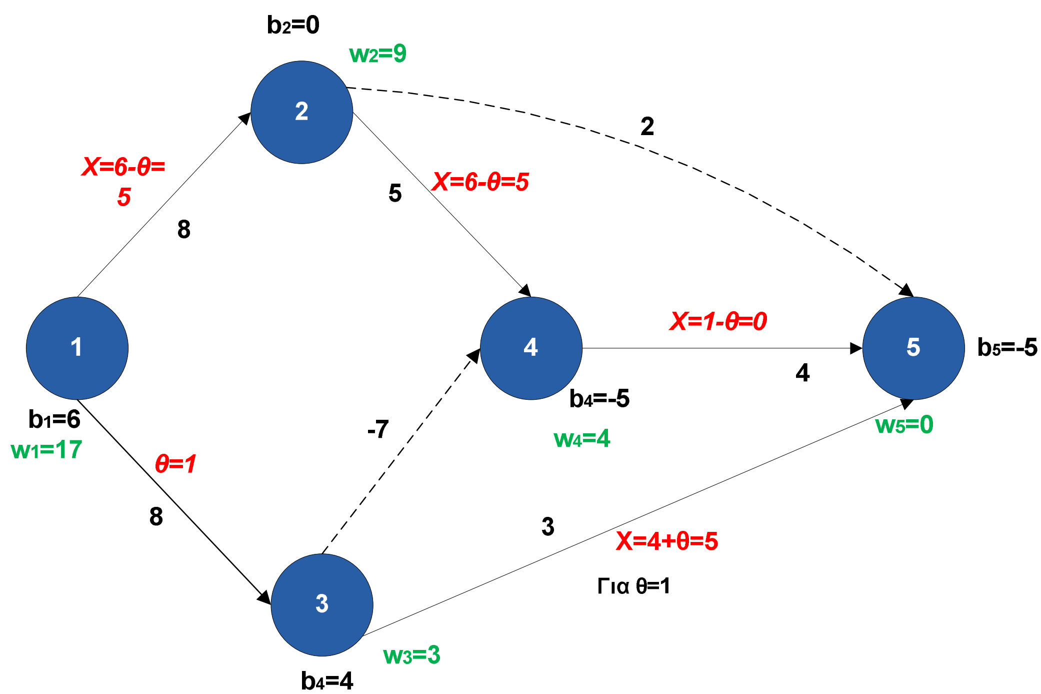
Για τη μη βασική 3→4 : $w_3 - w_4 - c_{34} = 3 - 4 - 6 = -7$

Για τη μη βασική 2→5 : $w_2 - w_5 - c_{25} = 9 - 0 - 7 = 2$



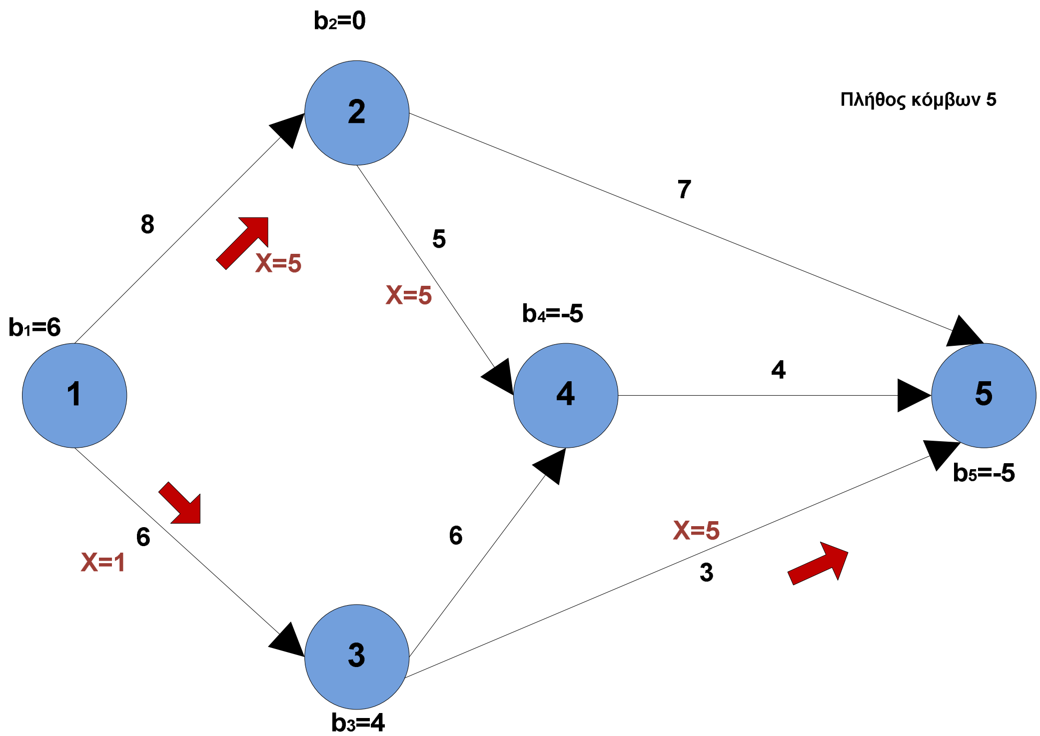
Σχήμα 6.4h

Για τους ίδιους λόγους κι επειδή δεν ισχύει η συνθήκη (1) για 2 μη βασικές ακμές παίρνουμε τη μεγαλύτερη τιμή απ'αυτές (εδώ την 8 για ακμή (1,3)) και **καθιστούμε** την εν λόγω ακμή, **βασική**. Μεταφέρουμε,λοιπόν, ροή μεταξύ των κόμβων 1 και 3 που την καλούμε θ. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το θ είναι 1.



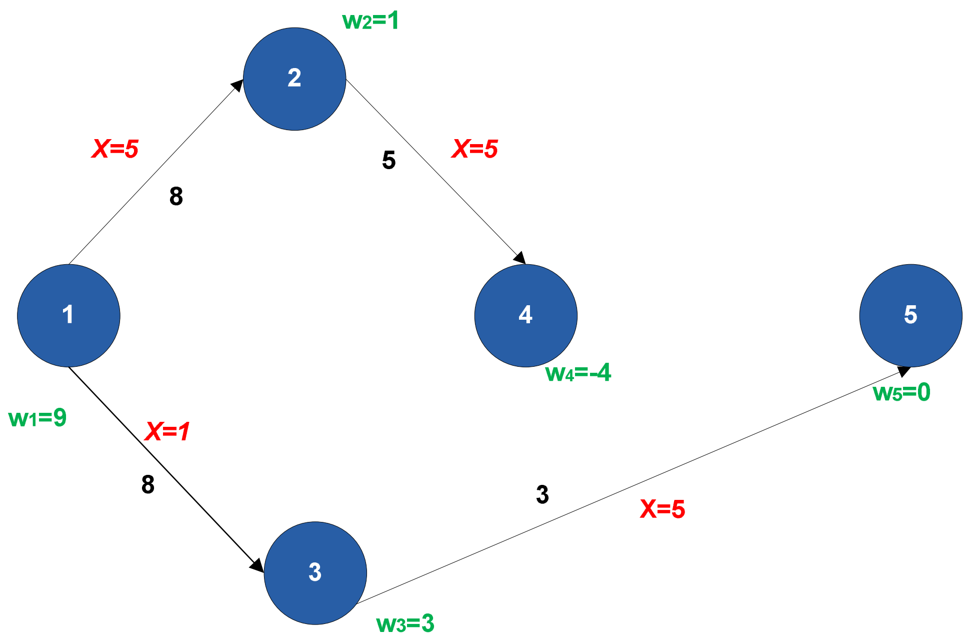
Σχήμα 6.4i

Το δίκτυο μετά τη νέα ροή θ=1 γίνεται:



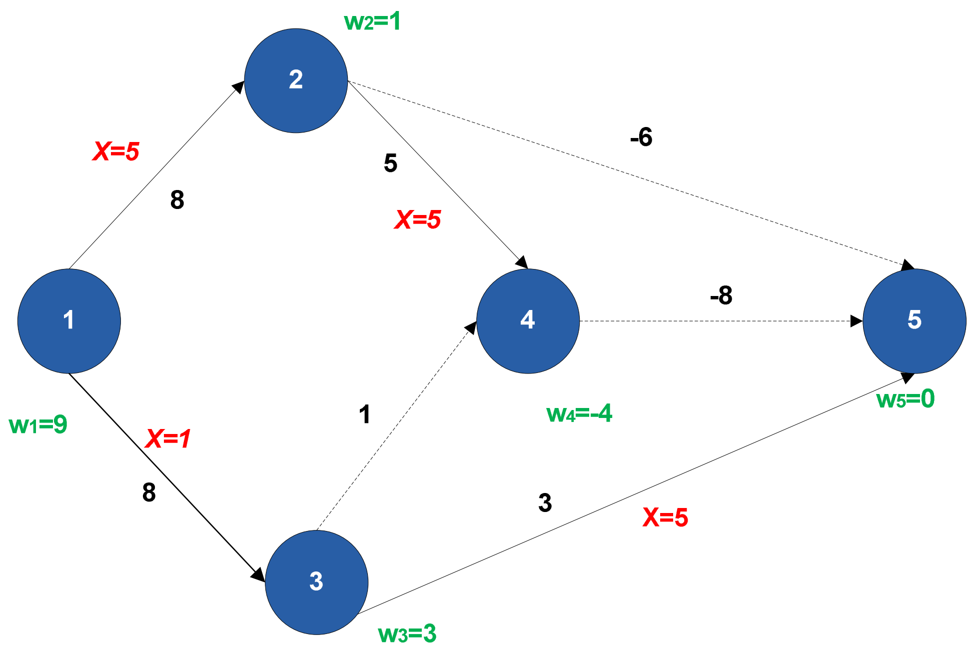
Σχήμα 6.4j

Το κόστος τώρα είναι: 40+6+15+25=86. Η νέα μείωση προήλθε από το θ=1 πολλαπλασιασμένο με το κόστος της καινούριας βασικής ακμής 8. Επανελέγχουμε αν η λύση μας είναι η ιδανική, δηλαδή βρίσκουμε τις δϋικές τιμές μετά και τη ροή θ=1.



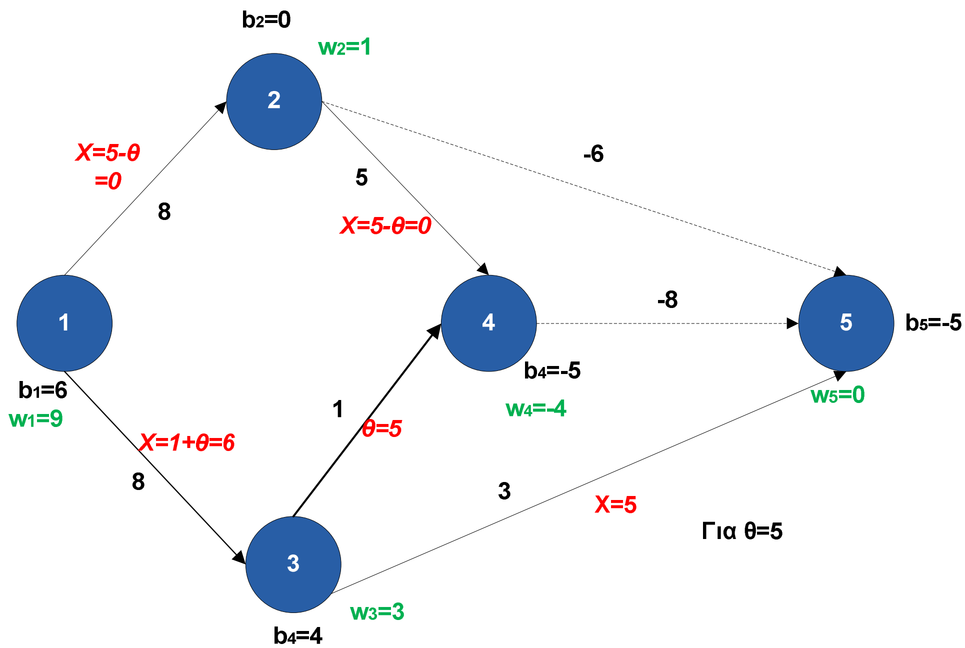
Σχήμα 6.4k

Ελέγχουμε για τις μη βασικές ακμές κι επειδή η 3□4 έχει θετική τιμή αντιβαίνει στον περιορισμό (1) και ως η μοναδική την καθιστούμε με τη σειρά της βασική μέσω της ροής θ.



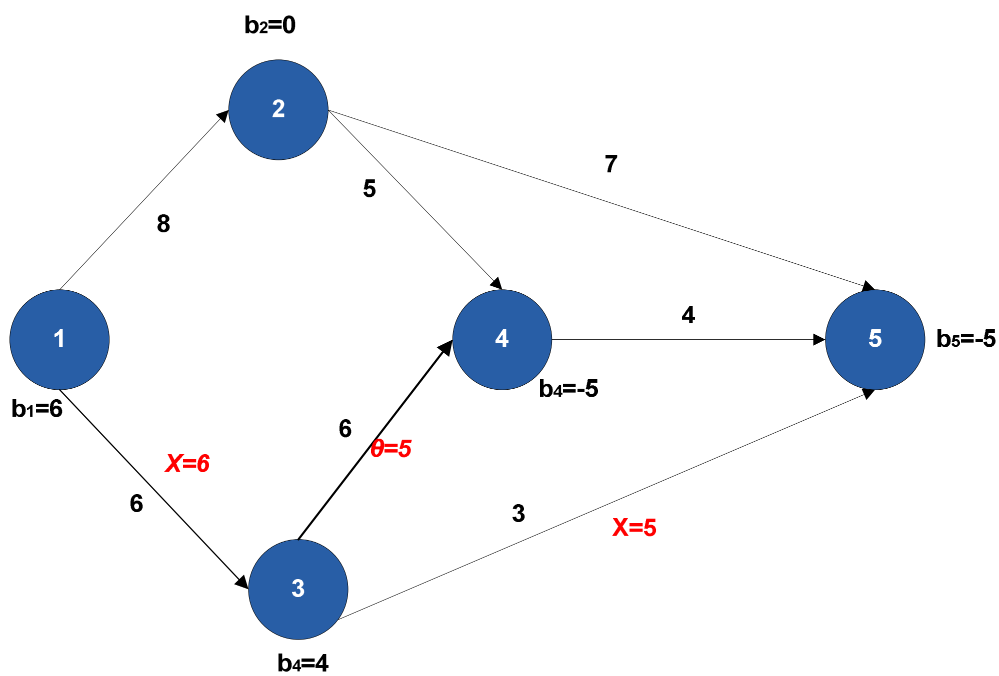
Σχήμα 6.4l

Για *ροή ϑ* από τον κόμβο 3 στον κόμβο 4, τότε αυτόματα από τον 2 στον 5-κόμβο έρχεται ροή *5-ϑ* για να ισορροπήσει ο κόμβος 4 ενώ από τον κόμβο 3 φεύγει ροή *5-ϑ* προς κόμβο-5 και ακολουθώντας αντίστροφη πορεία στην ακμή (1,2) κυλάει ροή *5-ϑ* και στην ακμή (1,3) ροή *1+ϑ*. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το θ και καθορίζεται από την πηγή είναι *ϑ*=5.



Σχήμα 6.4m

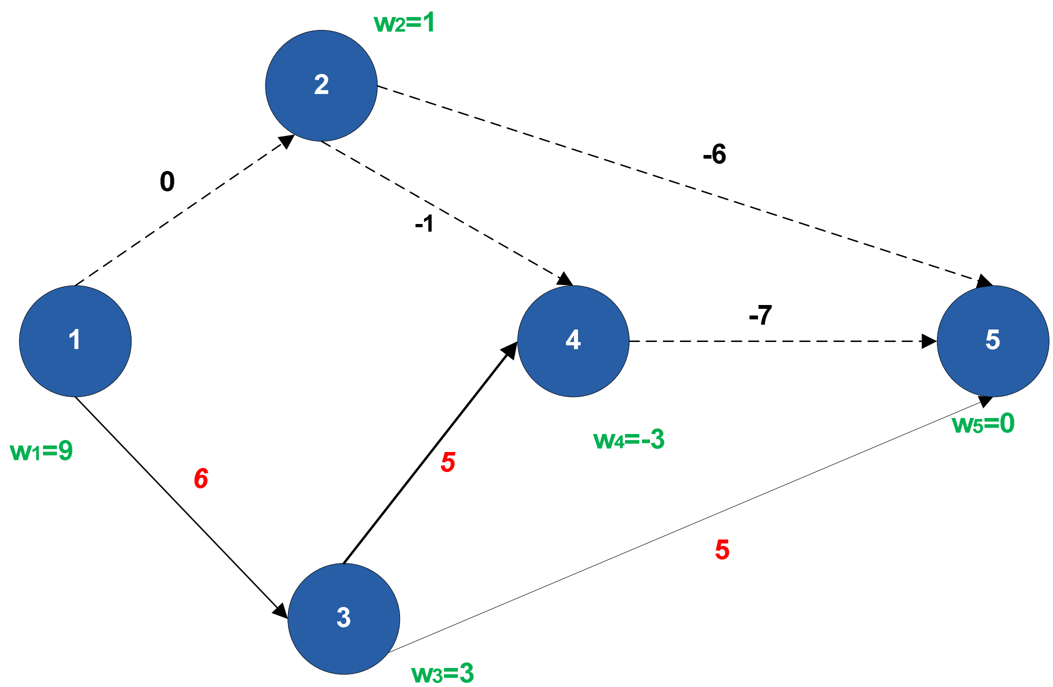
Επομένως το δίκτυο παίρνει τη μορφή:



Σχήμα 6.4n

Το κόστος είναι τώρα: 36+30+15=81.

Υπολογίζουμε ξανά τις w_i και ελέγχουμε τις μη βασικές ακμές:



Σχήμα 6.4ο

Επειδή ικανοποιούνται οι περιορισμοί για όλες τις μη βασικές ακμές, τότε η δϋική μας λύση είναι εφικτή. Συνεπώς το ελάχιστο κόστος για να επιτευχθεί η ροή **είναι 81 μονάδες.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Το Πρόβλημα Του Κινέζου Ταχυδρόμου (The Chinese Postman Problem)

7.1 Περιγραφή

Μια παραλλαγή του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή είναι αυτή του Κινέζου Ταχυδρόμου. Παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με το πρόβλημα που ήδη περιγράψαμε αλλά και σημαντικές διαφορές. Για τον σκοπό αυτό χρειάζεται να αναφέρουμε κάποιες νέες έννοιες.

Ονομάζουμε **ίχνος (trace)** τον περίπατο όπου κάθε ακμή εμφανίζεται το πολύ μία φορά. Ένας συνδεδεμένο και απλό γράφημα G(V,E) λέγεται **γράφημα του Euler** (ή Eulerian) αν και μόνον αν δεν έχει κορυφές περιττού βαθμού ενώ γράφημα ημί-Euler αν και μόνον αν έχει ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού. Για να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι Eulerian εξετάζουμε αρχικά αν είναι συνδεδεμένο (connected) το δίκτυο και στη συνέχεια αν οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό. Κάθε Eulerian ίχνος χρησιμοποιεί όλες τις κορυφές του γραφήματος. Για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή του *Κινέζου Ταχυδρόμου* πρέπει να περάσουμε **τουλάχιστον μία φορά** από κάθε ακμή και επιπλέον στην περίπτωση που διαθέτουμε περιττού βαθμού κορυφές πρέπει να περπατήσουμε μέσα από το ελάχιστο πλήθος ζευγών τέτοιων κορυφών.

Θεώρημα 7.1.1

Ένα συνδεδεμένο γράφημα *G(V,E)* είναι Eulerian αν και μόνον αν κάθε κόμβος είναι άρτιου βαθμού. Ακόμα , αν το *G(V,E)* έχει ακριβώς 2 κόμβους περιττού βαθμού τότε το γράφημα περιέχει ένα ίχνος που συνδέει αυτούς τους 2 κόμβους.

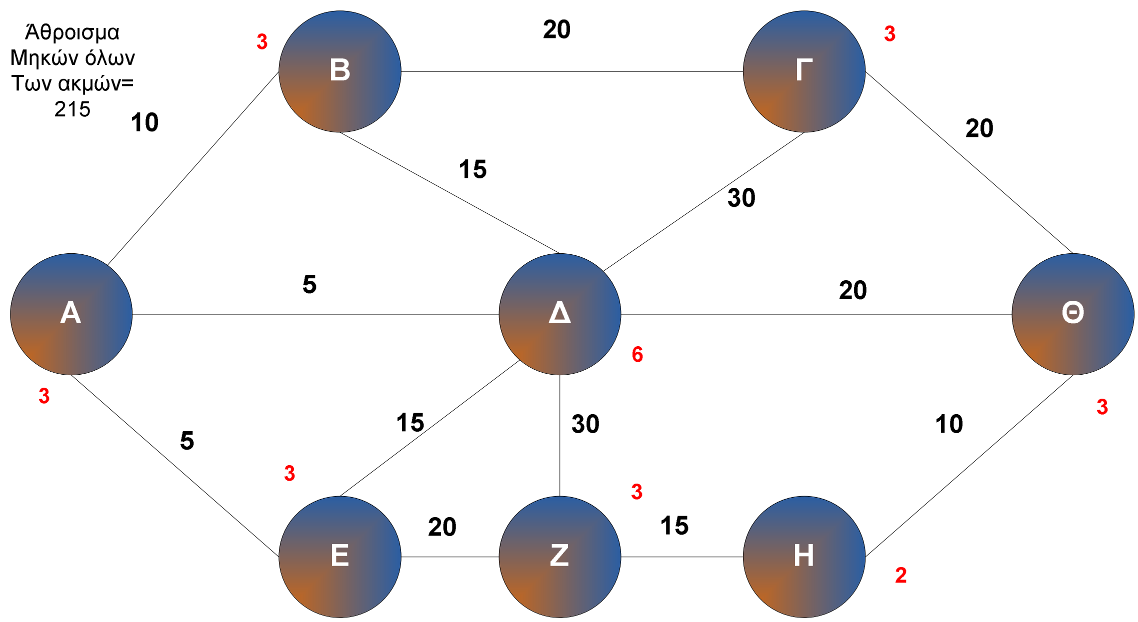
7.2 Αλγόριθμος Fleury

Η ακολουθία των βημάτων για την εύρεση της βέλτιστης διαδρομής του *Κινέζου Ταχυδρόμου* [18] περιγράφηκε από τον *Fleury* (1983) ως εξής :

1. Αν έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού (Eulerian), διάλεξε τυχαία μια κορυφή, έστω v_o
2. Βρες το ίχνος $T_\kappa=(v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,e_k,v_k)$ *και* σχεδίασε το γράφημα $G_k=G_{k-1}-e_k$
3. -Αν δεν υπάρχει ακμή που να ενώνεται με την κορυφή v_k στο G_k, τότε σταμάτα. Τότε το T_k είναι το κλειστό Eulerian ίχνος του γραφήματος G
   -Αν υπάρχει ακμή που ενώνεται με την κορυφή v_k στο G_k, τότε διάλεξε μιαν ακμή, έστω $e_{k+1}=(v_k,v_{k+1})$ φροντίζοντας να ανήκουν στο non-cut-edge του $G_{k.}$ Στη συνέχεια, όρισε ως $T_{k+1}=(v_0,e_1,\ldots e_{k,}v_{k,}e_{k+1,}v_{k+1})$. Επανάλαβε το βήμα 2 για το $T_{k+1.}$
4. Αν το G δεν είναι Eulerian τότε βρές όλες τις κορυφές περιττού βαθμού, έστω $v_{1,}v_2,\ldots,v_{2k}$
5. Βρές το συντομότερο μονοπάτι (v_i,v_j), P_{ij}, για κάθε τέτοιο ζευγάρι εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Έστω το βάρος του P_{ij}, W_{ij}.
6. Σχεδίασε ένα ολοκληρωμένο γράφημα G^* με κορυφές τις $z_1,z_2,\ldots,z_{2k}$ με u_i□z_i ενώνοντας τις z_i και z_j με ακμή βάρους w_{ij}.
7. Προσδιόρισε ένα σύνολο M με k ακμές, έστω $\{(z_1,z_1'),\ldots,(z_k,z_k')\}$ στο G^* ώστε
   i)κανένα ζευγάρι ακμών να μην είναι γειτονικά και
   ii) το M έχει το ελάχιστο βάρος ανάμεσα σ'όλα τα σύνολα τέτοιων ακμών
8. Στο G, διπλασίασε (duplicate) τις ακμές του P_{ij}, ενώνοντας τις v_i και v_j αν $(z_i,z_j) \in M$, κι έτσι προκύπτει ένα Eulerian γράφημα G^e του G.
9. Εφάρμοσε τον αλγόριθμο του Fleury στο G^e. Το αποτέλεσμα είναι η βέλτιστη διαδρομή στο G.

7.3 Παράδειγμα

Ας δούμε πως εφαρμόζονται τα προηγούμενα σ'ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω ότι ένας ταχυδρόμος ξεκινά κάθε πρωί από την υπηρεσία του και πρέπει να παραδώσει γράμματα και δέματα σε διάφορα σημεία περνώντας από δρόμους και τέλος να επιστρέψει στη βάση του. Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή;



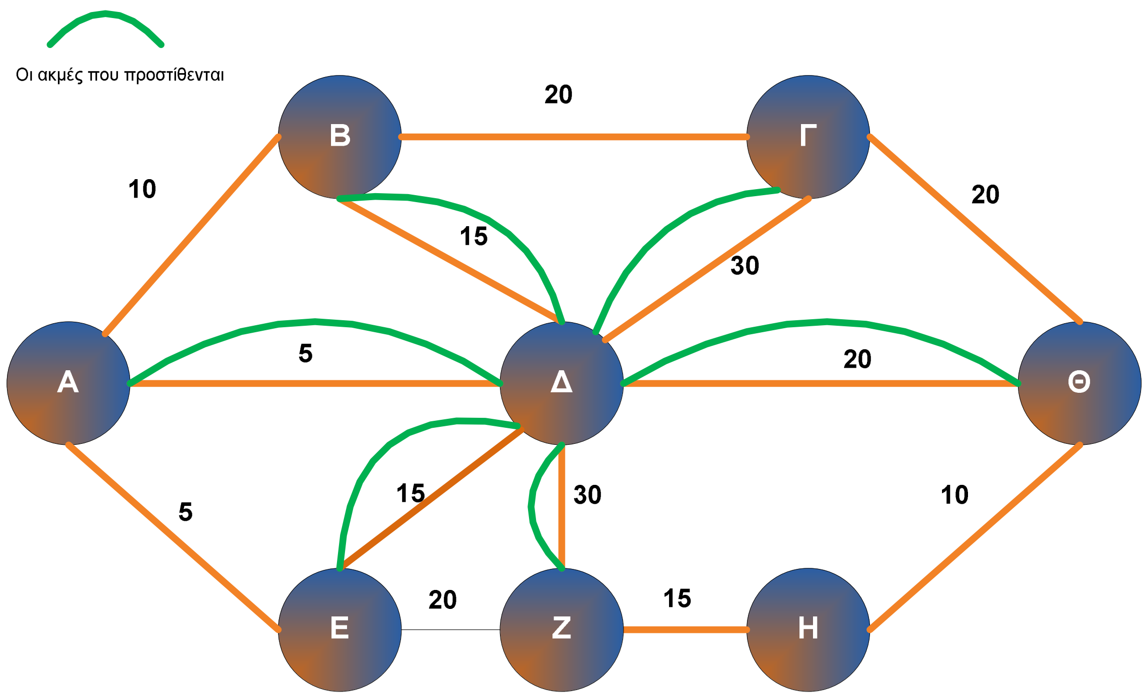
Σχήμα 7.3a

Το γράφημα εκείνο στο οποίο ξεκινώντας από μια τυχαία κορυφή επισκεπτόμαστε κάθε ακμή του μόνο μια φορά καλείται Eulerian. Αν το γράφημα είναι Eulerian , τότε βρίσκουμε το **Eulerian κύκλωμα** που έχει **μήκος** όσο και το άθροισμα των μηκών των ακμών που αποτελούν το κύκλωμα. Το πρώτο πράγμα που ελέγχουμε είναι ο βαθμός της κάθε κορυφής του δικτύου. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι κάποιοι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό (π.χ ο κόμβος Η με βαθμό 2, ο κόμβος Δ με βαθμό 6) ενώ κάποιοι άλλοι έχουν περιττό βαθμό (π.χ ο κόμβος Α με βαθμό 3). Με βάση όσα έχουμε πει παραπάνω το **γράφημά μας δεν είναι Eulerian**. Ωστόσο είναι εφικτό να μετατραπεί σε Eulerian με κάποιες προσθήκες ακμών. Στην περίπτωση αυτή ψάχνουμε να βρούμε το ελάχιστο μήκος ή βάρος που πρέπει να προσθέσουμε ώστε να προκύψει ένα κύκλωμα Eulerian. Επομένως με όρους ταχυδρόμου θα πρέπει να βρούμε τον ελάχιστο δρόμο που θα χρειαστεί ο ταχυδρόμος να περπατήσει προκειμένου να επισκεφτεί κάθε κόμβο.

1^{ο} βήμα

Εφ’όσον το δίκτυο δεν είναι Eulerian επιλέγουμε τυχαία ένα κύκλωμα. Έστω το μακρύ κύκλωμα:

Α-Β-Γ-Θ-Η-Ζ-Δ-Ζ-Ε-Δ-Ε-Α-Δ-Β-Δ-Γ-Δ-Θ-Δ-Α **(*)**



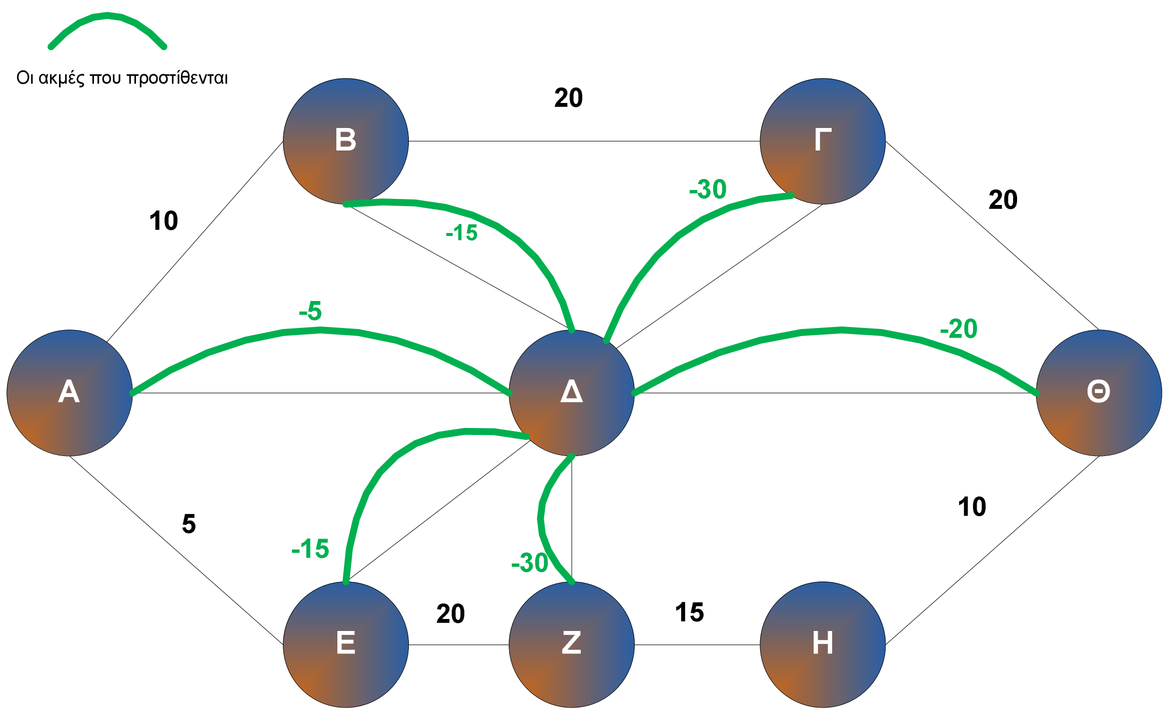
Σχήμα 7.3b

Το κύκλωμα αυτό (στο οποίο με πράσινες γραμμές συμβολίζουμε τις ακμές που έχουν προστεθεί στο δίκτυο κατά το πέρασμα του ταχυδρόμου με μήκος ακμής ίσο με το αρχικό) είναι τώρα Eulerian. Αν αθροίσουμε τα μήκη των ‘’πανομοιότυπων’’ (ή duplicate) ακμών έχουμε: *5+15+15+30+20+30=115* βρίσκουμε την επιπρόσυετη απόσταση που πρέπει να διανύσει ο ταχυδρόμος αν επιλέξει την παραπάνω διαδρομή-κύκλωμα. Συνεπώς το συνολικό μήκος της διαδρομής του ταχυδρόμου θα είναι μετά την επιβάρυνση των νέων ακμών

215 (συνολικό μήκος ακμών) + 115 = 330. Με τις προσθήκες των duplicate ακμών **κάθε κόμβος έχει τώρα άρτιο βαθμό** κι επομένως το γράφημα έγινε Eulerian. Άρα για την εφικτή λύση (*) έχουμε επιπλέον απόσταση 115.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να μειώσουμε αυτήν την επιβάρυνση των 115. Να σημειωθεί ότι το μήκος των 215 που προκύπτει από το άθροισμα των αρχικών μηκών των ακμών του δικτύου αποτελεί το κάτω φράγμα της απόστασης που θα διανύσει ο ταχυδρόμος ενώ το 330 είναι το άνω φράγμα του Eulerian γραφήματος. Δηλαδή το πρόβλημα βελτιστοποίησης έγκειται στην προσπάθεια να μειωθεί η ποσότητα των 115 μονάδων. Πως επιτυγχάνεται αυτό;

Για κάθε duplicate ακμή που έχουμε βάλει στο δίκτυο, θεωρούμε ότι έχει μήκος (ή βάρος) ίσο **και αντίθετο με το αρχικό της:**



Σχήμα 7.3c

2η φάση:

Εντοπίζουμε στο γράφημα κάποιους αρνητικούς κύκλους:

Ο κύκλος *Α-Β-Δ-Α* έχει μήκος 10-15-5=-10

Ο κύκλος *Β-Γ-Δ-Β* έχει μήκος 20-30-15=-25

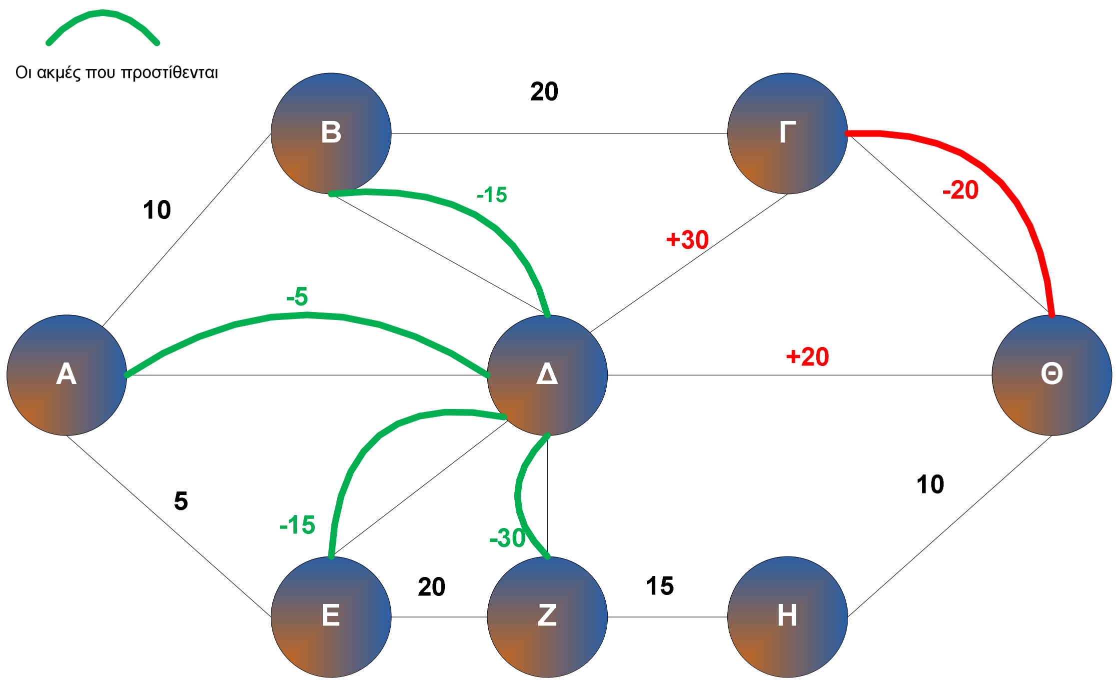
Ο κύκλος *Γ-Δ-Θ-Γ* έχει μήκος -30-20+20=-30

Ο κύκλος *Δ-Θ-Η-Ζ-Δ* έχει μήκος -20+10+15-30=-25

Ο κύκλος Δ-Ε-Ζ-Δ έχει μήκος -15+20-30=-25

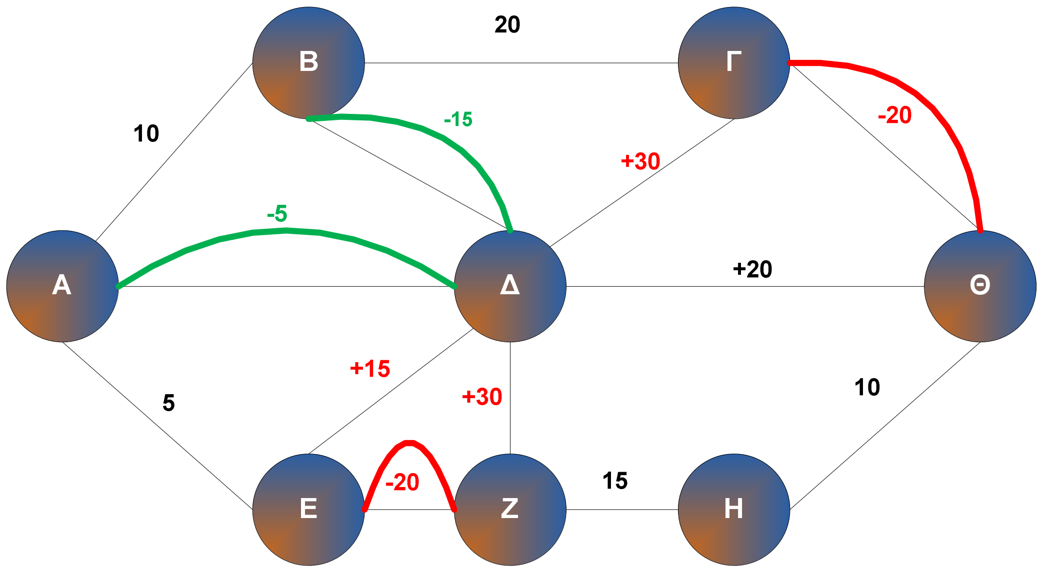
Ο κύκλος *Α-Δ-Ε-Α* έχει μήκος -5-15+5=-15

Στη συνέχεια παίρνουμε τον αρνητικό κύκλο με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή που εδώ είναι *Γ-Δ-Θ-Γ* και διαγράφουμε όπου υπάρχουν τις duplicate ακμές επαναφέροντας συγχρόνως τα αρχικά μήκη και προσθέτουμε όπου δεν υπάρχουν duplicate ακμές . Πιο συγκεκριμένα:



Σχήμα 7.3d

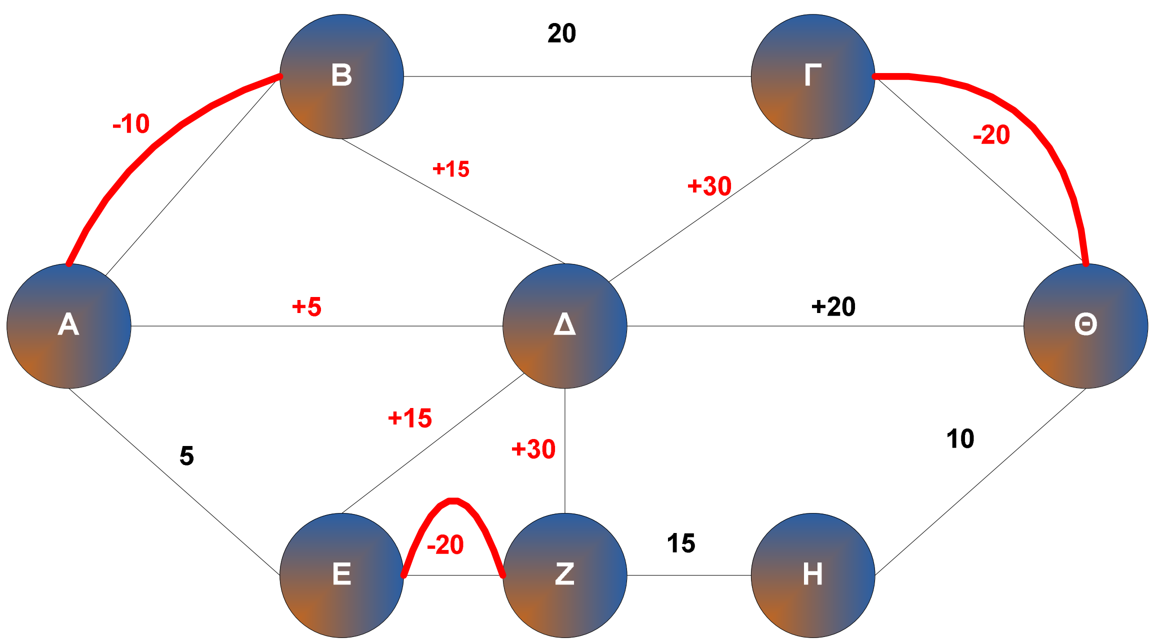
Με αυτόν τον **τρόπο εξοικονομούμε απόσταση +30+20-20=+30 μονάδες.** Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και παίρνουμε, τώρα , τον επόμενο κύκλο με τη μεγαλύτερη κατ'απόλυτο τιμή που είναι ο *Δ-Ε-Ζ-Δ* και κάνουμε τα ίδια:



Σχήμα 7.3e

Έτσι εξοικονομούμε ακόμα άλλες **25 μονάδες** από τον αρνητικό κύκλο *Δ-Ε-Ζ-Δ*.

Από τον κύκλο *Α-Β-Δ-Α* ''κερδίζουμε'' ακόμα 10 μονάδες.



Σχήμα 7.3f

Με τις παραπάνω τροποποιήσεις δεν υπάρχουν πια αρνητικοί κύκλοι στο δίκτυο. Επομένως έχουμε εξοικονομήσει συνολικά απόσταση ίση με 30+25+10=65 μονάδων και από τις 115 μονάδες επιβάρυνσης τελικά πετύχαμε να το μειώσουμε στις 115-65=50 μονάδες επιπλέον που είναι αποτέλεσμα των 3 duplicate ακμών Α-Β, Γ-Θ και Ε-Ζ. Το μήκος που θα πρέπει να καλύψει ο ταχυδρόμος γίνεται τώρα 215+50=265. Το Eulerian κύκλωμα είναι το :

Α-Β-Γ-Θ-Γ-Δ-Β-Α-Δ-Θ-Η-Ζ-Δ-Ε-Ζ-Ε-Α   μήκους 215+50=265.

Από τα παραπανω συμπεραίνουμε ότι αρκεί να προσθέσουμε 3 ακμές (που φαίνονται με κόκκινη γραμμή) ώστε να σχηματιστεί το Eulerian κύκλωμα.

Το μειονέκτημα, ωστόσο, της συγκεκριμένης μεθόδου έγκειται στο ότι απαιτείται κάποια αρχική εφικτή λύση που δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Ακόμα, όμως κι αν βρεθεί μια αρχική λύση πρέπει να αναζητήσουμε μια πιο βελτιωμένη, να εντοπίσουμε τους πιθανούς αρνητικούς κύκλους του γραφήματος, να εισαγάγουμε duplicate ακμές όπου χρειάζεται και εκτιμούμε το βάρος καθενός απ'αυτούς ώστε εν τέλει να μειώσουμε το συνολικό επιπλέον βάρος (μήκος) του περιπάτου.

Βιβλιογραφία-αναφορές

- [1] ''Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα''-Ιωάννης Κολέτσος & Δημήτρης Στογιάννης-Εκδόσεις Συμεών-Αθήνα 2012-ISBN 978-960-9400-42-8
- [2] ''Introduction to Operations Research''-Hillier & Lieberman – ISBN 0-07-232169-5
- [3]''Graph Theory''- Reinhard Diestel- Springer Verlag Heidelberg, New York 1997,2000,2005
- [4]''Graph Theory''- Eliott Brossard & Dr. James Morrow –Network Flow-3.6.2010-University of Washington
- [5] ''Introduction to Algorithms''-Thomas H. Cormen & Clifford Stein-The MIT Press-Cambridge Massachusetts
- [6] ''A new approach to the maximum flow problem''-Andrew V. Goldberg (Massachusetts Institute of Technology) & Robert E. Tarjan (Princeton University)
- [7] ''Introduction to algorithms''- 2nd Edition-Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest,Clifford Stein-McGrow - Hill Book Company ISBN 0-262-03293-7
- [8]''Θεωρία Γράφων''-Μάριος Μαυρονικολάου (Αναπ. Καθηγητής)-Τμήμα Πληροφορικής-Πάτρα 2002-ISBN 960-538-461-2
- [9]Δ. Σπινέλλης- ''Γράφοι'', Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
- [10] ''Θεωρία Γραφημάτων'' – Παναγιώτη Σπύρου (Επικ. Καθηγητής)- Αθήνα 1997- Πανεπιστήμιο Αθηνών- Μαθηματικών Τμήμα
- [11] ''Introduction to tractability and approximability of optimization Problems'' – Jianer Chen – Computer Science Department – Texas A & M University- July 8,2003
- [12]Schrijver, A [2002]- On the History of the transportation and maximum flow problems- Mathematical Programming 91 (3) : 437-445. doi: 10.1007/s101070100259
- [13] ''Algorithm Design''-Jon Kleinberg & Eva Tardos –Cornell University – Pearson Addison Wesley Education, Inc
- [14]''Introduction to Graph Theory''-J.E Fields-Copyright 2001-03-Southern Connecticut State University – Department of Mathematics
- [15] ''Functional Ecology''-Mathie Lihoreau, Lars Chittka, Nigel E. Raine-2011-DOI 10.111
- [16] ''The Algorithm Design Manual''-Steven S. Skiena-Springer-Department of Computer Science – State University of New York –ISBN 978-1-84800-069-8
- [17] ''Efficient Implementations of minimum-cost flow Algorithms''-Zoltan Kiraly & Peter Kovacs- Acta University Sapientae- Informatica 4 1-(2012) ISBN 0-321-29535-8

- [18] ''Network Optimization : Continuous and Discrete Models'' by Dimitri P. Bertsekas – Massachusetts Institute of Technology- ISBN 1-886529-02-7
- ''Journal of the Association for Computing''- Machinery Vol. 35- 1988 ACM 0004-5411/88/1000-0921
- ''Algorithms in a Nutshell''-Rublid- O'reilly Media – George T. Heinemann , Gary Pollice & Stanley Selkow – ISBN 9780596516246-P
- ''A Course in Combinatorial Optimization'' by Alexander Schrijver – CWI Department of Mathematics – University of Amsterdam
- ''Digraphs Theory, Algorithms and Applications- Jorgen Bang-Jensen & Gregory Gutin –Springer Verlag
- Biggs, N. ; Lloyd, E. and Wilson, R. (1986). Graph Theory , 1736-1936 Oxford University Press